RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 1° giugno 1912.

P. Blaserna Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali e dei nuclei delle equazioni integrali.* Nota del Corrispondente G. Lauricella.

Nella presente Nota mi propongo di dimostrare che per ogni sistema Φ non chiuso di funzioni ortogonali esiste un sistema Ψ (che diremo *complementare*) finito od infinito e numerabile di funzioni ortogonali, il quale, associato al sistema Φ, forma un sistema $\Omega = \Phi + \Psi$ di funzioni ortogonali chiuso; di dimostrare ancora l'unicità, intesa in un certo senso, del sistema complementare Ψ; e di dare un metodo per realizzare in ogni caso questo sistema. Dalle considerazioni che avrò occasione di fare nella discussione di tale metodo, seguirà in modo del tutto immediato la condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema di funzioni ortogonali sia chiuso. Questa condizione richiede, come sarà dimostrato, il *minimum* di condizioni; e potrebbe servire a dedurre in altro modo gli importanti risultati contenuti nella recente Memoria del sig. Stekloff: *Sur la théorie de fermature des systèmes de fonctions orthogonales dépendant d'un nombre quelconque de variables* (1).

Infine applicherò la teoria svolta allo studio della chiusura dei nuclei delle equazioni integrali di 1ª specie.

(1) Mémoires de l'académie impériale des sciences de St.-Pétersbourg, VIII série, vol. XXX, n. 4, année 1911.

Per semplicità di notazioni parlerò sempre di funzioni ortogonali di una sola variabile indipendente; ma nessuna modificazione speciale si richiede nel caso di funzioni ortogonali di più variabili indipendenti; sicchè i risultati qui ottenuti valgono senz'altro qualunque sia il numero di queste variabili. Per la medesima ragione considererò solamente nuclei contenenti, in ciascuno dei due gruppi di variabili, una sola variabile indipendente; ma i ragionamenti ed i risultati valgono senza modificazione alcuna, qualunque sia il numero delle variabili contenute in ciascuno dei due gruppi.

È superfluo che io qui insista sull'ufficio che i risultati di questa Nota possono avere nello sviluppo delle funzioni in serie di funzioni ortogonali [1] e nella risoluzione delle equazioni integrali di 1ª specie [2].

Esistenza di un sistema complementare.

1. Sia

$$\Phi = \varphi_1(x) , \varphi_2(x) , ...,$$

un sistema finito od infinito di funzioni ortogonali, definite in un certo campo $\overline{ab}$, ed integrabili in questo campo nel senso di Lebesgue insieme ai loro quadrati ed ai loro prodotti due a due. Se questo sistema non è chiuso, vuol dire che esisterà almeno una funzione $\theta_1(x)$, che supporremo integrabile [3] insieme al suo quadrato, tale che

$$\int_a^b \varphi_i(x)\, \theta_1(x)\, dx = 0 , \qquad (i = 1 , 2 , ...).$$

Si determini la costante c_1 in modo che, posto:

$$\psi_1(x) = c_1 \theta_1(x) ,$$

risulti:

$$\int_a^b |\psi_1(x)|^2\, dx = 1 ;$$

e si consideri il sistema di funzioni ortogonali:

$$\left.\begin{matrix} \varphi_1(x) , \varphi_2(x) , ... \\ \psi_1(x) . \end{matrix}\right\}$$

Se questo sistema non è chiuso, vuol dire che esisterà almeno una funzione $\theta_2(x)$, che supporremo integrabile insieme al suo quadrato, tale che

$$\int_a^b \psi_1(x)\, \theta_2(x)\, dx = 0 \quad , \quad \int_a^b \varphi_i(x)\, \theta_2(x)\, dx = 0 , \quad (i = 1 , 2 , ...) .$$

[1] Ved. la mia Nota: *Sopra gli sviluppi in serie di funzioni ortogonali.* Rendiconti del Circ. mat. di Palermo, tomo XXIX, anno 1910, 1° sem.

[2] Ved. la mia Nota: *Sulla risoluzione dell'equazione integrale di 1ª specie.* Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, ser. 5ª, vol. XX, aprile 1911.

[3] Intenderemo sempre nel senso di Lebesgue.

Si determini la costante c_2 in modo che, posto:

$$\psi_2(x) = c_2\,\theta_2(x),$$

risulti:

$$\int_a^b \{\psi_2(x)\}^2\,dx = 1;$$

e si consideri il sistema di funzioni ortogonali:

$$\begin{cases} \varphi_1(x)\,,\ \varphi_2(x)\,,\ \ldots \\ \psi_1(x)\,,\ \psi_2(x)\,. \end{cases}$$

Seguitando a ragionare nella stessa guisa o arriveremo ad un sistema finito di funzioni ortogonali:

$$\Psi = \psi_1(x)\,,\ \psi_2(x)\,,\ \ldots\,,\ \psi_n(x)\,,$$

tale che il sistema ortogonale:

$$\Omega = \begin{cases} \varphi_1(x)\,,\ \varphi_2(x)\,,\ \ldots \\ \psi_1(x)\,,\ \psi_2(x)\,,\ \ldots\,,\ \psi_n(x) \end{cases}$$

risulti chiuso, oppure si avrà un sistema Ψ infinito di funzioni ortogonali.

Ora, in virtù di un teorema di Schmidt [1], qualunque sistema di infinite funzioni ortogonali è numerabile, sicchè il sistema Ψ deve necessariamente essere numerabile; e perciò, indicate con $\psi_1(x)\,,\ \psi_2(x)\,,\ \ldots$ le funzioni che lo compongono, si avrà che il sistema di funzioni ortogonali:

$$(1) \qquad \Omega = \begin{cases} \varphi_1(x)\,,\ \varphi_2(x)\,,\ \ldots \\ \psi_1(x)\,,\ \psi_2(x)\,,\ \ldots \end{cases}$$

deve risultare necessariamente chiuso. Riepilogando si ha quindi il seguente teorema: *ogni sistema non chiuso di funzioni ortogonali, può rendersi chiuso associando ad esso un sistema finito o infinito e numerabile di funzioni ortogonali e tali che il sistema totale, che ne risulta, oltre ad essere chiuso, sia anche ortogonale.*

Teorema di unicità.

2. Vogliamo ora dimostrare che *il sistema Ψ, il quale associato al sistema Φ lo rende chiuso, è unico.* Qui l'unicità deve intendersi nel senso

[1] *Sur la puissance des systèmes orthogonaux de fonctions continues.* Comptes rendus de l'Ac. de Sc. Paris, tom. CXLIII, 2° sem. 1906, pp. 955-957.

che *qualunque altro sistema di funzioni* $\chi_1(x), \chi_2(x), \ldots$, *il quale, associato al sistema* Φ, *lo rende chiuso, è una combinazione lineare ed omogenea*, intesa in un certo senso che sarà ora precisato, *delle funzioni* $\psi_1(x)$, $\psi_2(x), \ldots$ *del sistema* Ψ.

Per dimostrare questo teorema basterà provare che *qualunque funzione* $\chi(x)$, *integrabile insieme al suo quadrato nel campo* $\overline{ab}$, *la quale soddisfa alle equazioni:*

$$\int_a^b \chi(x)\,\varphi_i(x)\,dx = 0\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

si può sempre esprimere linearmente ed omogeneamente, nel senso che ora sarà spiegato, *per mezzo delle* $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots$

Precisamente noi dimostreremo che, posto:

$$a_j = \int_a^b \chi(x)\,\psi_j(x)\,dx\,,$$

si può sempre determinare una serie finita od infinita di numeri interi, positivi e crescenti $n_1, n_2, \ldots$ tali che sia:

$$\chi(x) = \sum_1^{n_1}{}_j\, a_j\,\psi_j(x) + \sum_{n_1+1}^{n_2}{}_j\, a_j\,\psi_j(x) + \cdots, \tag{3}$$

la serie al secondo membro essendo *convergente uniformemente in generale* in tutto il campo $\overline{ab}$ nel senso di Weyl [1].

A tal uopo si ponga [2]:

$$f_p(x) = \sum_1^{p}{}_j\, a_j\,\psi_j(x);$$

e si osservi che dalla nota disuguaglianza di Bessel:

$$0 \leq \int_a^b \left\{\chi(x) - \sum_1^{m}{}_j\, a_j\,\psi_j(x)\right\}^2 dx = \int_a^b |\chi(x)|^2\,dx - \sum_1^{m}{}_j\, a_j^2\,,$$

risulta la convergenza della serie $\sum_1^{\infty}{}_j\, a_j^2$, in virtù della quale sarà per qual-

[1] *Ueber die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunctionen forschreiten.* Math. Annalen, Bd. LXVII, 1909; cfr. Plancherel, *Contribution à l'étude de la représentation d'une fonction*, ecc. Rendic. del Circolo Mat. di Palermo, tomo XXX; e G. Lauricella, *Sulla risoluzione dell'equazione integrale di 1ª specie.* Rend. della R. Acc. dei Lincei, ser. 5ª, vol. XX, anno 1911, 1° semestre.

[2] Cfr. Lauricella, *Sopra i nuclei reiterati*, § 2, Rend. della R. Acc. dei Lincei, ser. 5ª, vol. XX, anno 1911, 1° semestre.

siasi valore intero e positivo di q:

$$\lim_{p=\infty} \int_a^b \{f_{p+q}(x) - f_p(x)\}^2 \, dx =$$

$$= \lim_{p=\infty} \int_a^b \left\{ \sum_{p+1}^{p+q}{}_j \, a_j \, \psi_j(x) \right\}^2 dx = \lim_{p=\infty} \sum_{p+1}^{p+q}{}_j \, a_j^2 = 0 .$$

Questa ci dice che il sistema delle funzioni $f_p(x)$ è *convergente in media*; ed allora dal teorema di Weyl si avrà che è possibile determinare una serie infinita di numeri interi, positivi e crescenti $n_1 , n_2 , \ldots$, tali che la serie

$$(4) \qquad \theta(x) = \sum_{1}^{n_1}{}_j \, a_j \, \psi_j(x) + \sum_{n_1+1}^{n_2}{}_j \, a_j \, \psi_j(x) + \cdots$$

converga uniformemente in generale in tutto il campo $\overline{ab}$ verso una certa funzione $\theta(x)$ sommabile nel campo $\overline{ab}$ insieme al suo quadrato.

Notiamo che si ha:

$$\int_a^b \theta(x) \, \psi_j(x) \, dx = \lim_{t=\infty} \int_a^b f_{n_t}(x) \, \psi_j(x) \, dx = a_j ;$$

e per conseguenza:

$$(5) \qquad \int_a^b \{\chi(x) - \theta(x)\} \, \psi_j(x) \, dx = 0 , \qquad (j = 1 , 2 , \ldots).$$

Notiamo ancora che, integrando per serie, come qui è pur lecito di fare, si ottiene, in virtù della ortogonalità del sistema (1):

$$\int_a^b \theta(x) \, \varphi_i(x) \, dx = \sum_{1}^{n_1}{}_j \, a_j \int_a^b \psi_j(x) \, \varphi_i(x) \, dx +$$

$$+ \sum_{n_1+1}^{n_2}{}_j \, a_j \int_a^b \psi_j(x) \, \varphi_i(x) \, dx + \cdots = 0 ;$$

sicchè avremo, in virtù della (2),

$$\int_a^b \{\chi(x) - \theta(x)\} \, \varphi_i(x) \, dx = 0 .$$

Questa e la (5) ci dànno, rammentando che il sistema (1) delle $\varphi_i(x)$ e delle $\psi_j(x)$ è chiuso,

$$\chi(x) - \theta(x) = 0$$

in tutto il campo $\overline{ab}$, eccettuati al più i punti di un insieme di misura nulla. Di qui, avuto riguardo alla (4), si ricava la (3), appunto come volevamo dimostrare.

È evidente che le considerazioni precedenti si semplificano notevolmente nel caso in cui il sistema Ψ di funzioni $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ... sia finito.

Costruzione del sistema complementare.

3. Vediamo ora in qual modo, dato un sistema Φ non chiuso di funzioni ortogonali si possa realizzare ogni volta un sistema Ψ di funzioni ortogonali, che diremo *complementare*, il quale, associato al sistema Φ, dia luogo ad un sistema $\Omega = \Phi + \Psi$ ortogonale e chiuso.

Si consideri un qualsiasi sistema chiuso H di funzioni ortogonali, integrabili insieme ai loro quadrati e ai loro prodotti due a due [1]:

$$\text{(6)} \qquad \text{H} = \chi_1(x), \chi_2(x), \ldots$$

Poichè la funzione $\chi_1(x)$, come tutte le altre del sistema H, è integrabile insieme al suo quadrato, posto:

$$a_{1j} = \int_a^b \chi_1(x)\, \varphi_j(x)\, dx ,$$

risulterà, come al § precedente, che si può determinare, in virtù del teorema di Weyl, una serie infinita di numeri interi, positivi e crescenti $n_1, n_2, \ldots$, tali che la serie:

$$\sum_{1}^{n_1}{}_j a_{1j}\, \varphi_j(x) + \sum_{n_1+1}^{n_2}{}_j a_{1j}\, \varphi_j(x) + \cdots$$

sia convergente uniformemente in generale nel campo $\overline{ab}$. Allora, indicata con c_1 una costante indeterminata, avremo che l'espressione:

$$\psi_1(x) = c_1 \left[\chi_1(x) - \left\{ \sum_{1}^{n_1}{}_j a_{1j}\, \varphi_j(x) + \sum_{n_1+1}^{n_2}{}_j a_{1j}\, \varphi_j(x) + \cdots \right\} \right]$$

risulterà integrabile insieme al suo quadrato nel campo $\overline{ab}$, e la serie al

[1] Ad esempio, si potrebbe prendere la serie ($a = 0$, $b = 1$):

$$1, \cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x, \ldots, \cos 2n\pi x, \operatorname{sen} 2n\pi x, \ldots$$

secondo membro sarà pure integrabile termine a termine; per cui si potrà scrivere:

$$\int_a^b \psi_1(x)\,\varphi_i(x)\,dx = c_1 \int_a^b \chi_1(x)\,\varphi_i(x)\,dx +$$

$$- c_1 \left\{ \sum_1^{n_1}{}_j\, a_{1j} \int_a^b \varphi_j(x)\,\varphi_i(x)\,dx + \sum_{n_1+1}^{n_2}{}_j\, a_{1j} \int_a^b \varphi_j(x)\,\varphi_i(x)\,dx + \cdots \right\}$$

$$= 0\,, \qquad (i = 1\,,\, 2\,,\, \ldots);$$

e se si determina la costante c_1 in modo che sia

$$\int_a^b \{\psi_1(x)\}^2\,dx = 1\,,$$

avremo una prima funzione della serie complementare cercata, a meno che in tutto il campo $\overline{ab}$ (i punti di un insieme di misura nulla al più esclusi) non sia identicamente:

$$\chi_1(x) = \sum_1^{n_1}{}_j\, a_{1j}\,\varphi_j(x) + \sum_{n_1+1}^{n_2}{}_j\, a_{1j}\,\varphi_j(x) + \cdots$$

Nel caso che ciò avvenga, si operi sulla funzione $\chi_2(x)$, appunto come si è operato sulla $\chi_1(x)$; e così si seguiti ad operare, se occorre, sulla $\chi_3(x)$, sulla $\chi_4(x)$, ... Con questo procedimento deve necessariamente ottenersi una prima funzione $\psi_1(x)$. Infatti nel caso contrario, posto:

$$a_{ij} = \int_a^b \chi_i(x)\,\varphi_j(x)\,dx\,,$$

si dovrebbe avere per i numero intero qualsiasi (1):

$$\chi_i(x) = \sum_1^{n_1}{}_j\, a_{ij}\,\varphi_j(x) + \sum_{n_1+1}^{n_2}{}_j\, a_{ij}\,\varphi_j(x) + \cdots; \tag{7}$$

ed allora, poichè il sistema Φ non è chiuso, indicando con $f(x)$ una soluzione effettiva delle infinite equazioni:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_j(x)\,dx = 0\,, \qquad (j = 1\,,\, 2\,,\, \ldots),$$

(1) S'intende che i numeri $n_1\,, n_2\,, \ldots$ potranno variare al variare di i.

risulterebbe per i qualsiasi, integrando per serie,

$$\int_a^b f(x)\,\chi_i(x)\,dx = 0\,.$$

Ciò che è in contraddizione con l'ipotesi che il sistema H delle funzioni ortogonali (6) sia chiuso.

Ottenuta una prima funzione $\psi_1(x)$, la si associi al sistema dato Φ; e se il nuovo sistema, così ottenuto, non è chiuso, si operi con esso sul solito sistema H [1], appunto come si è già operato su di esso col sistema dato Φ.

Procedendo sempre nella stessa maniera, o si otterrà un sistema finito Ψ di funzioni $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)$, il quale associato al sistema dato Φ lo rende chiuso, oppure si otterrà un sistema infinito numerabile Ψ di funzioni $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots$, che associato al sistema dato Φ darà luogo ad un sistema $\Omega = \Phi + \Psi$ ortogonale, il quale pure sarà chiuso, come risulta ripetendo il ragionamento precedente ai sistemi H ed Ω [2].

Condizione necessaria e sufficiente per la chiusura.

4. Dalle considerazioni del § precedente risulta ovviamente il seguente teorema: *condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema Φ di funzioni ortogonali sia chiuso è che per tutte le funzioni $\chi_i(x)$, di un solo sistema chiuso qualsiasi* H *di funzioni ortogonali, valga uno sviluppo della forma* (7).

Infatti se il sistema Φ è chiuso, le espressioni:

$$\psi_i(x) = c_i\left[\chi_i(x) - \left\{\sum_1^{n_1}{}_j\, a_{ij}\,\varphi_j(x) + \sum_{n_1+1}^{n_2}{}_j\, a_{ij}\,\varphi_j(x)\right\}\right]$$

devono per qualsiasi valore di i essere uguale allo zero in tutto il campo $\overline{ab}$ (esclusi al più i punti di un insieme di misura nulla); mentre d'altra parte se la (7) ha luogo qualunque sia il valore di i, il procedimento del § precedente non ci dà alcuna funzione $\psi_i(x)$ per il sistema complementare Ψ, e perciò il sistema Φ deve essere necessariamente chiuso.

(1) Naturalmente è inutile operare sulle funzioni $\chi_1(x), \chi_2(x), \ldots$, che già sono state adoperate nell'operazione precedente per ottenere la $\psi_1(x)$.

(2) Da tutto ciò risulta nuovamente dimostrato il teorema del § 1.

Valendosi della nozione di *equazione di chiusura*, introdotta dallo Stekloff [1], il precedente teorema può mettersi sotto l'altra forma seguente: *condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema* Φ *di funzioni ortogonali sia chiuso, è che l'equazionedi chiusura relativa al sistema* Φ *sia soddisfatta da tutte le funzioni di un solo sistema chiuso qualsiasi* H *di funzioni ortogonali.*

5. Vogliamo ora dimostrare che la precedente condizione necessaria e sufficiente richiede il *minimum* di condizioni affinchè un qualsiasi sistema Φ sia chiuso; e precisamente vogliamo dimostrare che *le condizioni enunciate per le* $\chi_i(x)$ *del sistema* H, *affinchè un sistema* Φ *sia chiuso, sono indipendenti tra di loro.* Naturalmente basterà verificare questa proposizione per un particolare sistema Φ, ad esempio per il sistema

$$\varphi_1(x) = \chi_1(x)\,,\ \varphi_2(x) = \chi_2(x)\,,\ \ldots\,,\ \varphi_{l-1}(x) = \chi_{l-1}(x)\,,$$

$$\varphi_l(x) = \chi_{l+1}(x)\,,\ \varphi_{l+1}(x) = \chi_{l+2}(x)\,,\ \ldots\,,$$

cioè per il sistema Φ che si ottiene dal sistema H togliendovi la funzione $\chi_l(x)$.

Ora relativamente a questo sistema Φ si ha, se $i < l$,

$$a_{ij} = \int_a^b \chi_i(x)\,\varphi_j(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{per } j \neq i\,, \\ 1 & \text{per } j = i\,, \end{cases}$$

se $i > l$,

$$a_{ij} = \int_a^b \chi_i(x)\,\varphi_j(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{per } j \neq i-1\,, \\ 1 & \text{per } j = i-1\,; \end{cases}$$

mentre se $i = l$ si ha:

$$a_{lj} = \int_a^b \chi_l(x)\,\varphi_j(x)\,dx = 0 \qquad (j = 1\,,2\,,\ldots)\,.$$

Quindi, limitandoci per esempio alla seconda forma del teorema, si ha che l'equazione di chiusura:

$$\int_a^b \{\chi_i(x)\}^2\,dx = \sum_1^\infty{}_j\, a_{ij}^2$$

mentre è verificata per le $\chi_i(x)$ del sistema H con indice i diverso da l, non è verificata per la funzione $\chi_l(x)$; e ciò dimostra appunto l'enunciata indipendenza.

[1] Loc. cit., pag. 3.

Sistema completo di soluzioni dell'equazione di chiusura dei nuclei.

6. La teoria di Schmidt c'insegna [1] che, dato un nucleo qualsiasi $K(x, y)$ integrabile insieme al suo quadrato nel proprio campo di variabilità, sono determinati due sistemi di funzioni ortogonali:

$$\Phi = \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$$
$$F = f_1(y), f_2(y), \ldots$$

ed una corrispondente serie di costanti

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots,$$

tali che, indicato con $\overline{cd}$ il campo di variabilità della y, si ha:

$$f_i(y) = \lambda_i \int_a^b K(x, y)\, \varphi_i(x)\, dx \quad , \quad \varphi_i(x) = \lambda_i \int_c^d K(x, y)\, f_i(y)\, dy.$$

Essa c'insegna ancora che se $\theta(x)$ soddisfa all'equazione:

$$\int_a^b K(x, y)\, \theta(x)\, dx = 0,$$

che chiameremo *equazione di chiusura del nucleo* $K(x, y)$ *rispetto al gruppo* x, si avrà:

$$\int_a^b \theta(x)\, \varphi_i(x)\, dx = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots);$$

e viceversa. Similmente se $h(y)$ soddisfa all'*equazione di chiusura del nucleo* $K(x, y)$ *rispetto al gruppo* y:

$$\int_c^d K(x, y)\, h(y)\, dy = 0,$$

si avrà:

$$\int_c^d h(y)\, f_i(y)\, dy = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots);$$

e viceversa.

[1] *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen*, § 16, Math. Annalen, Band LXIII, Heft 4.

Ciò premesso, i teoremi dei §§ 1 e 2 ci dànno: *se il nucleo* $K(x,y)$ *non è chiuso rispetto al gruppo* x (*o al gruppo* y), *esiste un sistema* Ψ *finito od infinito e numerabile di funzioni ortogonali, le quali soddisfano alla equazione di chiusura di questo nucleo rispetto al gruppo* x (*o al gruppo* y) *e sono tali che qualunque altra soluzione dell'equazione di chiusura si può esprimere linearmente ed omogeneamente* (nel senso spiegato al § 2) *per mezzo delle funzioni del sistema* Ψ.

Il sistema Ψ sarà detto *sistema completo di soluzioni* dell'equazione di chiusura del nucleo $K(x,y)$ rispetto al gruppo x (o al gruppo y).

Il metodo, indicato al § 3 per la costruzione dei sistemi complementari, vale naturalmente per la costruzione dei sistemi completi di soluzioni dell'equazione di chiusura del nucleo $K(x,y)$, tanto rispetto al gruppo x, quanto rispetto al gruppo y.

Chimica-fisica. — *Per la storia della spettrochimica.* Nota del Socio R. Nasini.

È stata pubblicata nell'aprile nei Rendiconti della Società chimica tedesca [1] la bella necrologia del prof. J. W. Brühl scritta dal prof. K. Auwers. In essa il prof. Auwers, in modo veramente imparziale e obiettivo, mette in evidenza i servigi resi alla scienza, e specialmente alla chimica ottica, dal prof. Brühl. Il prof. Brühl fu senza dubbio un instancabile lavoratore, al quale dobbiamo un estesissimo materiale di osservazioni fatte e raccolte con grandissima precisione e con immensa cura. Nei diversi campi della chimica fisica, specialmente in quello della spettrochimica, i suoi lavori hanno portato contributi veramente validi ed il nome del Brühl resta onorevolmente legato non solo alla grande messe di osservazioni e misure da lui fatte, ma anche ad alcuni concetti fondamentali e a profonde considerazioni di larga portata nei riguardi delle relazioni tra il potere rifrangente e la costituzione chimica dei composti organici.

L'Auwers parlando dei lavori del Brühl si è dovuto occupare anche dei miei ed in questo riguardo mi sembra che egli non sempre sia stato nel vero; e così per l'interesse della storia della spettrochimica mi credo in dovere di insistere sopra alcuni punti. Non è la prima volta che lo faccio, ma sembra che sia necessario di farlo ancora, giacchè, specialmente per parte degli uomini di scienza tedeschi, anche quando si occupano proprio della storia dell'argomento, si cade in veri errori di fatto.

L'Auwers parlando delle obiezioni da me fatte al Brühl circa la generalizzazione delle sue prime leggi, riconosce che esse obiezioni erano serie

[1] K. Auwers, Julius Wilhelm Brühl, Ber. d. deutschen chem. Gesellschaft, *44*, 3757.

perchè si fondavano sul fatto indiscutibile che le regole del Brühl per i derivati naftalici non erano applicabili, e prosegue poi « Den Schluss von Nasini, dass es demnach stark zu bezweifeln sei, ob die Molrefraktion überhaupt ein Hilfsmittel für Konstitutionsbestimmong sei, kann Brühl in überzeugender Weise als ungerechtfertigte Verallgemeinerung kennzeichnen, aber eine befriedigende Erklärung für jene Ausnahmen von seinen Regeln vermag er zunächst nicht zu geben ». Ora questo lo disse più volte a quei tempi il Brühl, il quale affermava anzi che io voleva discreditare tutto il campo delle indagini sul potere rifrangente. Ma l'accusa era veramente strana dal momento che per molti e molti anni io mi occupai quasi esclusivamente del potere rifrangente, stabilendo anzi alcune regole che sono state delle più fruttuose in questo campo di ricerche. La differenza tra me e il Brühl stava in questo: che io era molto più *costitutivo*, ed egli allora molto più *additivo*: e l'avvenire era dei costitutivi, come poi diventò in modo così eminente il Brühl!

Come pure l'Auwers, dopo aver detto che il Brühl da principio credette la dispersione un'influenza nociva, di cui non si poteva tener conto e di cui bisognava liberarsi, aggiunge che egli studiò poi le formule di dispersione arrivando alla conclusione che nessuna poteva dare un valore indipendente dalla lunghezza d'onda e che quindi tutte erano da rigettarsi. Or bene a questa conseguenza giunse il Brühl nel 1886 (1), io invece vi era giunto sino dal 1884 affermando che non si poteva in nessun modo adottare la costante A della formula del Cauchy, così cara al Brühl nei suoi primi lavori (2). Sembra inoltre che l'Auwers creda che il Landolt ed io fossimo contrarii alla formula in n^2: invece sta il fatto che io per il primo l'usai nei miei lavori sui composti dello zolfo comparsi nel 1882 e che poi l'ho sempre usata insieme coll'altra: solamente, tanto il Landolt che io, abbiamo sostenuto — e lo sostengo anche adesso — che le due formule, quella in n e quella in n^2 conducono sempre su per giù agli stessi resultati.

Riguardo alla dispersione l'Auwers riconosce che io aveva ragione nel mettere in evidenza la sua grande importanza e torto il Brühl che per molto tempo sostenne, come se fosse un assioma, la seguente tesi:

« *La dispersione non sta in nessun rapporto nè col potere vifrangente delle sostanze nè colla loro costituzione chimica* » (3).

(1) J. W. Brühl, *Experimentelle Prüfung der älteren und der neueren Dispersionsformeln*. Liebig's Annalen Bd., *236*, 233, 1886.

(2) R. Nasini, *Sulle costanti di rifrazione*. Atti R. Acc. Lincei, Memorie della Classe di sc. fis. ecc., 3ª, XIX, 1884.

(3) J. W. Brühl, *Untersuchungen über die Molekularrefraction organischer flüssiger Körpern von grossem Farbenzerstrenungsvermögen*. Liebig's Annalen, Bd. *235*, 1, 1886 (la frase citata si trova a pag. 104).

Relativamente alla misura della dispersione, che secondo l'Auwers è stata introdotta nella scienza del Brühl, veramente l'espressione adottata dal Brühl è quella stessa di cui si servì il Gladstone nei suoi lavori, salvo che quest'ultima si riferiva alla formula in n e l'altra alla formula in n^2. E il Gladstone aveva già calcolato anche le dispersioni atomiche degli elementi. Non c'è poi dubbio che il Brühl, riconosciuto il suo errore, mostrò in modo mirabile e con larghissimo materiale esperimentale quante importanti e quante utili conclusioni si potevano dedurre dal potere dispersivo dei composti organici.

Ma un altro punto — il più importante — mi preme di mettere in evidenza. Scrive l'Auwers: « *Endlich sei noch des optischen Einflusses der Konjugation gedacht, auf den Brühl zwar nicht zuerst, aber am nachdrücklichster und bestimmtesten hingewiesen hat. Geahnt wurde er schon von Gladstone, doch nicht richtig erkannt. Dies est vielmehr das Verdienst Egkman's* » il quale « *feststellte, dass regelmässige die Substanzen in denen die Doppelbindung in der Seitekette dem Benzolkern benachbart ist, durch höhere Refraktion und Dispersion ausgezeichnet sind* ».

Or bene la supposizione vaga e indeterminata del Gladstone fui proprio io che la sottoposi ad una rigorosa prova esperimentale, che fu un vero *experimentum crucis*: esaminai composti isomeri, alcuni preparati appositamente da me per la prima volta, negli uni dei quali la catena laterale non satura era unita al nucleo benzolico per un atomo di carbonio non saturo, negli altri per un atomo di carbonio saturo e stabilii, prendendo in considerazione anche i derivati naftalici, che da tutti questi fatti si poteva concludere « *che l'unione di una catena non satura al nucleo del benzolo fa aumentare notevolmente la rifrazione e la dispersione quando tale unione avviene per l'atomo di carbonio non saturo; quando invece il gruppo laterale si salda al fenile per un atomo saturo non si nota aumento alcuno: la rifrazione del composto è la somma della rifrazione dei componenti* ». Questo io dimostrai nel 1885 [1] e l'Eykman, che sembra ignorasse completamente i miei lavori, pubblicò la sua Memoria nel 1889 [2] e non fece che applicare estesamente e ad interessanti composti quanto io aveva stabilito. Ma sebbene le cose sieno tanto evidenti, pure tutti coloro che in genere si occupano di spettrochimica ed anche quelli che ne fanno la storia in Germania, hanno sempre detto e seguitano a dire come dice il prof. Auwers [3]; il che vuol dire che tutti si sono abbeverati e si abbeve-

[1] R. Nasini, *Sul valore più elevato della rifrazione atomica del carbonio*. Rend. Acc. Lincei, serie 4ª, vol. I, anno 1885.

[2] Berl. Ber., *22*, 2736, a. 1889.

[3] Vedi p. es., Rimbach, *Ueber die Beziehungen zwischen Lichtbrechung und chemischen Zusammensetzung der Körpen* (nel trattato del prof. Landolt), e la mia Nota *A proposito di un recente trattato*, ecc. Atti R. Istit. Veneto, tom. *59*, p. 2ª, 211, 1899.

rano ad una sola e medesima fonte. Un tempo si rimproveravano gli scienziati francesi di non conoscere che la letteratura dei lavori francesi: sembra che adesso questo rimprovero possa indirizzarsi agli uomini di scienza tedeschi. È in fondo poco male: ma non è troppo chiedere a chi vuol fare la storia di un argomento che prima di scriverla studî i diversi lavori che ad esso si riferiscono! E sì che dei miei lavori furono fatti estesi sunti in tedesco!

Il Brühl si mostrò da prima contrario a quel mio modo di vedere e disse che io voleva render conto dell'alto potere rifrangente e dispersivo dei derivati naftalici, dell'anetolo ecc. ecc., con *ipotesi strane e contorte*: poi, comparsi i lavori dell'Eykman, che erano di natura puramente confermativa, della mia spiegazione divenne uno dei più caldi fautori; solamente che la attribuì sempre all'Eykman, sebbene sapesse che era mia dal momento che come mia l'aveva combattuta! Ed è così che l'Auwers attribuisce anche al Brühl l'esplicazione dell'alto potere rifrangente e dispersivo della naftalina coll'esaltamento prodotto dall'unione dei gruppi fenilici. E riguardo pure all'esaltamento debbo ancora una volta mettere in evidenza che questo concetto sono proprio io che l'ho introdotto nella scienza e precisamente a proposito del solfocianato di fenile e dei derivati benzolici a catena laterale non satura, di quelli naftalici ecc. Così io insieme con A. Scala ci esprimevamo nel 1886.

« *In questa combinazione* (*solfocianato di fenile*) *l'unione del gruppo* S = E = N *dotato di forte potere rifrangente produce, diremo così, un esaltamento della rifrangibilità: questo fenomeno è assai analogo all'altro, messo in rilievo da uno di noi, dell'aumento di rifrazione quando al gruppo benzolico si unisce una catena laterale non satura e per un atomo di carbonio non saturo* » (1). E su questo io insisteva nel 1886, tre anni prima cioè che l'Eykman pubblicasse i suoi lavori. Anche la parola « *esaltamento* » tradotta in tedesco è rimasta nella scienza, del che io sono veramente lieto (2).

Come anche fui io il primo che misi in evidenza che nei nuclei eterociclici l'elemento estraneo produce una *depressione* del potere rifrangente e dispersivo, importante a notarsi adesso che su questa depressione si lavora e si specula, riproducendosi delle idee da me e dal Carrara già emesse sino dal 1894 (3). Finalmente poi debbo aggiungere, giacchè siamo a discorrere

(1) R. Nasini e A. Scala, *Sulla rifrazione molecolare dei solfocianati, degli isosolfocianati e del tiofene*. Rend. R. Acc. Lincei, 1886, pag. 617 (seduta del 20 giugno 1886).

(2) Già mi occupai di questo argomento, a proposito di due Note del Brühl, *Die optische Wirkungen aneinder* (konjugirter) *ungesättigter Atomgruppen* (Berl. Ber. XL, 878 e 1153, 1907), nella mia Nota: *Azioni ottiche di gruppi atomici non saturi in immediata vicinanza*. Gazz chim., *37*, 2ª. 1907

(3) R. Nasini e G. Carrara, *Sul potere rifrangente dell'ossigeno, dello zolfo e dell'azoto nei nuclei eterociclici*. Gazz. chim., *24*, p. 1ª, 256, a. 1894.

della storia della spettrochimica, che si deve alle indagini mie e dei miei allievi d'aver dimostrato come nell'idrogenazione dei nuclei condensati, l'entrata dei primi due atomi di idrogeno p. es. nel nucleo naftalico o antracenico è sufficiente a fare sparire l'aumento del potere rifrangente dovuto alla presenza degli atomi di carbonio Gladstone-Nasini, o se vogliamo all'unione immediata di due gruppi fortemente rifrangenti e dispersivi. E mi propongo di esaminare alcuni dei lavori più recenti su questi argomenti in quanto han relazione colla costituzione dei nuclei condensati e di quelli eterociclici.

Chimica. — *Sulla presenza dell'uranio in rocce italiane. Graniti dell'isola di Montecristo e tufo radioattivo di Fiuggi* (1). Nota del Socio R. Nasini e di F. Ageno.

La pubblicazione dell'interessante Nota del prof. F. Millosevich: *Zeunerite ed altri minerali dell'isola di Montecristo* (2), ci spinge a far note alcune esperienze da noi eseguite già da varî anni e riguardanti la presenza dell'uranio in rocce italiane (3).

Minerali di uranio in Italia e, in genere, rocce contenenti uranio, sembrava non esistessero; o almeno non si trovava nessuna indicazione, sia nei trattati di mineralogia sia in alcuni lavori riassuntivi. Nondimeno, Matteo Spica, sino dal 1894, in una sua Memoria intitolata: *Intorno all'analisi di un minerale di molibdeno e sull'esistenza di un tetramolibdato ferreo* (4), analizzando alcuni minerali di molibdeno provenienti dalla regione metallifera di Stilo in Calabria, in una sostanza gialla di aspetto ceroso, asserisce di aver trovato il 50 % circa di uranio e il 30 % circa di molibdeno, da cui risulterebbe la composizione $U_3O_3 . 3MoO_3$, ossia quella di un trimolibdato di uranio. Ma il prof. Panichi, nella sua Nota: *Molibdenite ed altri*

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Pisa.

(2) Questi Rend., vol. XXI, 1, pag. 594. Seduta del 5 maggio 1912.

(3) Queste ricerche furono annunziate all'Accademia dei Lincei nella seduta del 7 novembre 1909 (Rend. Acc. Lincei, 1909, 2, pag. 312); ma la relativa Nota non venne mai pubblicata. Un cenno di esse si trova però nella Nota pubblicata da uno di noi (Nasini) con M. G. Levi, intitolata: *Sopra la radioattività di materiali italiani*, comparsa nella Gazzetta Chimica, anno XL, part. II, 1910. Viene detto in questa Nota, a proposito dei materiali esaminati: « quelli dell'isola di Montecristo ci vennero cortesemente inviati dall'Amministrazione della Casa Reale per ordine diretto di S. M. il Re. Essi presentavano speciale interesse per la presenza, intravveduta in materiali dell'isola stessa dal prof. G. Roster, di tracce di uranite, che, come è noto, è fosfato di uranio e di rame ». In nota a piè di pagina è poi detto: « Questo granito contiene rame e tracce di uranio; vedi a tale proposito: R. Nasini e F. Ageno, *Sulla presenza dell'uranio in rocce italiane* (Rend. Acc. Lincei, 1909).

(4) Gazz. chim., XXIV, 1, 1894, pag. 97.

minerali di Bivongi e di Pazzano (1), riscontrò pure una sostanza analoga a quella descritta dallo Spica; però, esaminandone la radioattività, la trovò piccolissima, e potè stabilire che non si tratta certo di un composto di uranio. Ma poichè assoluta sicurezza non vi è che lo Spica e il Panichi abbiano avuto tra le mani l'identica sostanza, così altri studî sui minerali di quell'importante regione sarebbero certo desiderabili.

Allorchè uno di noi (Nasini) cominciò i suoi studî per indagare se esistano in Italia rocce o minerali molto radioattivi da cui potesse ricavarsi il radio o altro elemento simile, si rivolse naturalmente a ricercare se vi erano rocce contenenti uranio e, da principio, proprio nulla tu trovato nella letteratura; confessiamo che sfuggì la Memoria dello Spica, giacchè, tanto dal titolo di essa, quanto dall'indice della Gazzetta, nulla appariva che si riferisse all'uranio. Invece si ebbe la fortuna — per puro caso — di esumare un lavoro di G. Roster, in cui si parla della presenza dell'uranio nei graniti dell'isola di Montecristo. Crediamo utile di riportare per intero questa breve Nota, pubblicata sino dal 1876 col titolo: *Note mineralogiche su l'isola d'Elba*, del dott. Giorgio Roster, parte 1ª, 1875 (2): « *Uranite*. Formula: $U_2Ph_2O_8$, « $U_2H_2O_4$. CuH_2O_2. $4H_2O$. Sist. crist. dimetrico. Da un saggio di granito « dell'isola di Montecristo, che ebbi in dono dal sig. Foresi, fra cristalli di « ortose che spiccano sulle pareti di una piccola geode, si mostra un mine- « rale assai raro, nuovo affatto per le nostre isole dell'Arcipelago e forse « per l'Italia; voglio dire l'Uranite o fosfato cuprifero di uranio.

« Il minerale può riconoscersi anche al solo guardarlo, avendo l'appa- « renza caratteristica della specie a cui appartiene. Somigliantissimo agli « esemplari di Johanngeorgenstadt in Sassonia, è, come quello, cristallizzato. « I cristalli, piccoli e resi tabulari per il grande predominio delle basi, « sono dicroici, di splendore adamantino e di un vago color di mela, vol- « genti alcuni al giallo. Le lamine sono alquanto flessibili e assai facili a « sfaldarsi nella direzione della base.

« Nel tubo chiuso svolge acqua. Al cannello fonde annerendo e colora « in verde la fiamma. Con sale di fosforo, perla leggermente azzurrognola. « Sul carbone e con soda, tenuissimo globetto di rame. La soluzione con « ammoniaca dà precipitato fioccoso e giallastro, e, sotto l'azione tanto del- « l'acido solfidrico quanto del ferrocianuro di potassio e degli altri reagenti, « offre principalmente le proprietà dei sali di uranio e, in tenuissima misura, « anche quelle del rame: non però quelle della calce, che dovrebbesi trovare « qualora si trattasse di calcouranite.

« Altre prove non ho potuto fare, causa la tenuità della materia; ma quelle « tentate parmi sieno sufficienti a non lasciar dubbio sulla vera natura del « minerale che ho scoperto nel granito di Montecristo ».

(1) Rend. Acc. Lincei, XX, 2, 1911, 654. Seduta del 3 decembre 1911.

(2) Bollettino del R. Comitato geologico d'Italia, anno 1876, pag. 317.

È probabile che i cristalli esaminati dal prof. Millosevich sieno uguali o molto simili a quelli studiati dal Roster.

Avuta notizia della presenza di questo minerale uranifero, pensammo subito che nell'isola di Montecristo potessero trovarsi altri minerali più ricchi in uranio e che ci fosse la speranza di trovare anche minerali molto radioattivi: eventualmente pechblenda, autunite ed altri adatti per la estrazione del radio. E subito fu fatta domanda a S. M. il Re perchè volesse permetterci l'accesso nell'isola, e, intanto si compiacesse di far mettere a nostra disposizione alcuni dei minerali dell'isola stessa. S. M. il Re accolse benevolmente l'una e l'altra domanda, del che fummo e siamo a Lui profondamente grati e subito dalla Amministrazione della Real Casa ci fu inviata una ricca raccolta delle più importanti rocce di Montecristo, che furono immediatamente esaminate dal punto di vista della loro radioattività. Veramente, questa — contro le nostre speranze — non fu trovata molto grande, bensì dello stesso ordine di quella di altre rocce di analoga natura o di natura diversa: maggiore radioattività, ad es., presentano le trachiti e i tufi del M. Amata, e molte rocce vulcaniche dei Monti Cimini. Riportiamo qui i risultati delle nostre ricerche, già riferiti nella sopra citata Nota di R. Nasini e M. G. Levi. Le misure furono eseguite con un elettroscopio a campana di Elster e Geitel avente una capacità elettrica di cm. 14,5. Per ogni prodotto viene data la dispersione in volt-ora prodotta nell'apparecchio da 125 gr. di sostanza polverizzata e secca, ed inoltre i valori, in ampères, delle intensità della corrente di saturazione provocata nell'apparecchio stesso:

	Volt-ora	Ampères
Granito di Montecristo rossastro	15	67×10^{-15}
» con tracce di sostanze verdastre. .	10.5	47×10^{-15}
» a struttura porfirica	7.6	34×10^{-15}
» a struttura compatta	1.0	4.4×10^{-15}
» metamorfico per contatto	12.9	57.7×10^{-15}

È nel granito a struttura porfirica che apparivano, o almeno apparivano meglio, le macchie verdognole della mica di uranio. Cercammo di accumulare il materiale che ci pareva più adatto, lo portammo in soluzione con acido cloridrico concentrato, e dal precipitato del terzo gruppo ricercammo l'uranio, servendoci di varî metodi e principalmente di quello consigliato anche dallo Spica, facendo cioè digerire con carbonato ammonico e ricercando poi l'uranio con acqua ossigenata e con ferrocianuro potassico. Avemmo sempre resultati positivi, come li avemmo anche positivi attaccando circa due chilogrammi di roccia. Restava quindi accertata la presenza dell'uranio nei graniti di Montecristo.

Data però la piccola radioattività delle rocce, e l'esiguo contenuto in uranio dovuto a disseminazioni della mica uranifera, non credemmo utile di pro-

seguire ulteriormente questi studî nè di recarci a fare esplorazioni sul posto. A tutto ciò devesi aggiungere anche il fatto che uno di noi, avendo lasciato l'Università di Padova per quella di Pisa, dovette interrompere parecchi dei lavori in corso. Non escludiamo che altri minerali a più grande contenuto in uranio — e anche, eventualmente, radiiferi — possano trovarsi nelle rocce di Montecristo, come lo suppone anche il Millosevich: e per quanto le esperienze da noi fatte non sieno molto incoraggianti, pure qualche saggio più esteso, e su rocce scavate a maggior profondità, sarebbe desiderabile.

Accertammo poi la presenza dell'uranio nel tufo radioattivo dal quale scaturisce la celebre acqua di Fiuggi, nel quale tufo sono pure contenuti rame, titanio, vanadio, bario, acido fosforico. Questo tufo è molto radioattivo; è, senza dubbio, tra le rocce comuni, la più radioattiva conosciuta in Italia. I resultati di queste indagini furono già pubblicati nella Nota di R. Nasini e M. G. Levi: *Studio chimico-fisico sulla sorgente di Fiuggi presso Anticoli di Campagna* (1).

Chimica. — *Analisi di una molibdenite di Calabria.* Nota del Socio R. Nasini e del prof. Enrico Baschieri.

La molibdenite in Italia è stata trovata solo in pochi luoghi.

Il Jervis (2), senza dire di dove ha tratto le informazioni, la cita in provincia di Torino, a Courmayeur (2); a Traversella (2), in granuli nella sienite; a Drusacco (2), associata alla calcopirite; in provincia di Novara a Quittengo (2). associata alla pirite in ganga di quarzo; in provincia di Sondrio (2), in scagliette o laminette minute, affatto insignificanti, nel granito al Bolladore presso Sondalo; in provincia di Cagliari (3) ad Assemini (3), rarissima; a Villaputzu, associata al quarzo (3). In Piemonte la molibdenite venne scoperta per la prima volta verso l'anno 1856 dall'illustre mineralogista Quintino Sella, a Macchetto (Vallone di Rialmosso, comune di Quittengo Biella) e presso Traversella.

Lo studio chimico della molibdenite del Biellese è stato fatto da A. Cossa (4) e, recentemente, anche dallo Zambonini (5).

(1) Gazz. chim. italiana, XXXVIII, 1, pag. , 1908.

(2) G. Jervis, *I tesori sotterranei dell'Italia*, vol. I, pag. 84, 123, 126, 133, 219. Torino, 1873.

(3) G. Servis, *I tesori sotterranei dell'Italia*, vol. II, pag. 36-180.

(4) *Sulla molibdenite del Biellese.* Atti Regia Accad. dei Lincei, Transunti, 1877 (3a), 1, 206.

(5) I. Zambonini, *Ueber die Drusenmineralien des Syenits der Gegend von Biella.* (Zeitschr. f. Krystallogaaphie u. s w. XL Band, 2 u 3 Heft). pag. 211. Leipzig, 1905.

In Toscana, questa specie fu menzionata da Giuseppe Giuli (1) nella miniera del Bottino presso Serravezza nelle Alpi Apuane; però il d'Achiardi (2) pone in dubbio la sua esistenza, inchinando piuttosto a credere essere il Giuli caduto in equivoco con la boulangerite compatta, che per il suo colore e per la sua particolare lucentezza somiglia molto alla molibdenite. La molibdenite è stata trovata inoltre al M. Somma, sempre associata alla galena (3); alle Isole dei Ciclopi (4) nel basalto, molto rara, ed infine in Sardegna nel vallone Ospe, non lungi da Oliena (5).

Della presenza di molibdenite presso Bivongi in Calabria dava notizia il Cortese nel 1894 (6), e questa molibdenite fu analizzata da M. Spica (7).

La molibdenite di Bivongi è stata recentissimamente studiata dal professore U. Panichi (8).

Pure proveniente dalla Calabria e dalla stessa regione metallifera di Stilo è il campione da noi esaminato.

In esso la molibdenite è disseminata nel quarzo, associata ad ocra molibdica formatasi, secondo ogni probabilità, in seguito a decomposizione del solfuro di molibdeno. Si presenta sotto forma di laminette facilmente sfaldabili, di splendore metallico, colore bleu grigio; sulla carta lascia il caratteristico tratto verde-giallastro. Quasi tutti gli autori affermano (9) che la molibdenite, anche se ridotta in lamine molto sottili, riesce perfettamente opaca; solo il Knop (10) dice di aver notato in questo minerale la trasparenza verde porro, con cui sarebbe in rapporto la traccia verde-giallastra lasciata dal minerale sulla carta.

Noi abbiamo potuto con certezza osservare che le laminette, ridotte convenientemente sottili ed osservate al microscopio, appaiono realmente colorate in verde-porro: ed inoltre, a nicol incrociati ed a luce parallela, appaiono

(1) Giuseppe Giuli, *Staz. miner. Tosc.* 1842.

(2) A. d'Achiardi, *Mineralogia Toscana*, 2, 328. Pisa, 1873.

(3) G. Freda, *Breve cenno sulla composizione chimica e sulla giacitura della molibdenite* ecc., del M. Somma. Rend. della R. Acc. delle Scienze Fis. e Matemat. di Napoli, fascicolo II, novembre 1883.

(4) A. Silvestri, *Sulla molibdenite delle Isole dei Ciclopi.* Boll. Acc. Gioenia di Scienze Naturali di Catania, fasc. XXXII, 19 marzo 1893.

(5) D. Lovisato, *Contributo alla mineralogia sarda.* Rend. Acc. Lincei, pag. 258, 4 aprile 1886, Roma.

(6) *Descrizione geologica della Calabria*, pubblicata a cura del R. Ufficio Geologico. Roma, 1895.

(7) M. Spica, *Intorno all'analisi di un minerale di molibdeno* ecc. Gazz. chimica, XXIV, 1, 1894, pag. 97.

(8) U. Panichi, *Molibdenite* ecc. Questi Rend., XX, 2, 654, dicembre 1911.

(9) Citiamo fra gli altri: Dana. *The System of Mineralogy*, pag. 41. New York, 1892; C. Hintze. *Handbuch der Mineralogie*, erster Band, *Dritte Lieferung*, pag. 410 e segg., Leipzig, 1899.

(10) Neues Jahrb, (1856), 46.

completamente estinte, e ciò d'accordo con la sfaldatura basale e con la cristallizzazione esagonale del minerale (1).

Una determinazione del peso specifico eseguita col picnometro alla temperatura di 15° 8 C., dette il valore 4.62, che assai si avvicina a quello medio trovato dal Cossa (2) su quattro determinazioni: 4.70.

I caratteri chimici del minerale concordano con quelli generalmente ammessi per la molibdenite, e cioè: al cannello ferruminatorio è infusibile; colora la fiamma in giallo verde; anche per aggiunta di aria calda è infusibile, sia nella fiamma di ossidazione sia in quella di riduzione: tuttavia, con ossigeno, fonde, formando vapori-bianco giallastri ed un deposito cristallino bianco (3). In un crogiuolo aperto dà vapori solforosi ed un sublimato giallo pallido di MoO_3; anche sul carbone dà vapori solforosi, e lo ricopre di una polvere bianco-giallastra a caldo, bianca a freddo. Fondendo con nitrato potassico, si ha una viva reazione, con fenomeno luminoso; sciogliendo la massa fusa nell'acqua, si ha una soluzione incolora la quale, trattata con acido cloridrico e zinco, oppure con cloruro stannoso, diventa successivamente azzurra, verde e bruna. È pochissimo solubile in acido solforico concentrato e bollente o, in acido cloridrico; si scioglie invece bene nell'acqua regia e viene ossidato dall'acido nitrico, con formazione di MoO_3. In corrente di cloro si scompone completamente, con formazione di cristalli grigi di pentacloruro.

Oltre a queste reazioni, già note, abbiamo osservato che la molibdenite si scioglie in idrato potassico a caldo; ed inoltre che, facendo agire clorato potassico in soluzione su polvere di molibdenite a caldo (4), la temperatura durante il riscaldamento rimane stazionaria circa a 87, ma non si avverte alcuna reazione sensibile. Filtrando, però, dopo alquanto tempo il liquido filtrato dà reazione manifesta di solfato con cloruro baritico. In solfuro sodico invece, a caldo, la molibdenite appare affatto insolubile, pur prolungando il riscaldamento per parecchie ore.

Il minerale, posto in soluzione di cloruro d'oro, si ricopre di uno strato di oro metallico, e ciò conformemente a quanto ha trovato il Cossa (5). Invece non siamo riusciti ad osservare che esso si ricopra, sia pur lentamente, di rame in soluzione di solfato di rame, come riporta l'Hintze (6).

(1) La cristallizzazione della molibdenite fu per un certo tempo dubbia, ed essa fu ritenuta esagonale o monoclina ed anche rombica; ma dopo gli studii di Kenngot (Uebers. miner. Forsch., 1855 — 105), quasi da tutti viene considerata esagonale.

(2) loco citato.

(3) G. Spezia, *Groth's Zeitschr*, 14, 503.

(4) In modo simile a quanto ha fatto lo Spezia per la pirite. Vedi: *Azione chimica del clorato di potassio sulla pirite e sull'haerite.* Rendic. Acc. delle Sc. di Torino, volume XLIII, 5 aprile 1908.

(5) loco citato.

(6) *Handb* ecc., pag. 411.

L'analisi qualitativa del minerale non rivelò in esso la presenza di altri elementi, oltre lo zolfo e il molibdeno.

Masataka Ogawa ha recentemente pubblicato due Note [1] su alcuni minerali del Giappone, reinite e molibdenite, nei quali avrebbe trovato la presenza di un nuovo elemento, il nipponio, cui competerebbe il peso atomico 100, cioè dell'elemento la cui esistenza e proprietà erano state prevedute dal Mendeleieff.

Il metodo da lui seguìto nell'esaminare se nella molibdenite fosse contenuto il nuovo elemento, è il seguente:

Il minerale, polverizzato, fu bruciato all'aria fino a che non mandava più vapori solforosi. Il residuo, giallo a caldo e giallo-verdastro pallido a freddo, fu posto a digerire con soluzione diluita di ammoniaca. Quindi la porzione insolubile in ammoniaca fu posta a digerire con acido cloridrico diluito, e la soluzione venne filtrata dalla parte indecomposta del minerale.

La soluzione acida fu quasi neutralizzata con ammoniaca; e, dopo saturazione con cloruro ammonico e stare a sè, si formò un precipitato giallo pallido. Il precipitato, apparentemente vanadiato ammonico, fu separato per filtrazione.

Nel filtrato giallo-verdastro venne fatto passare idrogeno solforato, fino a saturazione; ed il precipitato nero, con ciò formatosi, fu filtrato. Il filtrato venne liberato dall'idrogeno solforato per ebullizione, e fu aggiunto allora perossido di idrogeno e ammoniaca.

Gli idrossidi precipitati furono ridisciolti in acido cloridrico diluito e riscaldati aggiungendo iposolfito sodico per separare il ferro. Gli stessi furono filtrati, fusi con una miscela di carbonato sodico e di nitrato potassico, e la massa fusa venne sciolta in acqua.

Dopo decomposizione della soluzione con acido, l'ammoniaca dava solo un piccolo intorbidamento, dovuto apparentemente alla presenza di piccole quantità di alluminio. Riducendo con zinco e acido cloridrico, l'ammoniaca dava un abbondante precipitato in presenza di un eccesso di cloruro ammonico. Lo spettro dell'idrossido così ottenuto e sciolto in acido cloridrico, mostrava le stesse linee di quello osservato nella torianite e reinite. (Lo zinco usato per la riduzione era preparato per elettrolisi di una soluzione pura di solfato di zinco e di ammonio).

La soluzione ammoniacale ottenuta trattando con ammoniaca, il minerale arrostito conteneva anch'essa una porzione dell'elemento in questione. Questa soluzione, dopo acidificazione con acido acetico e separazione dell'acido molibdico come molibdato baritico, non dètte alcun precipitato con ammoniaca: ma, dopo riduzione con zinco e acido cloridrico, l'ammoniaca, in pre-

[1] *Preliminary note on a new element in thorianite* (The Journal of the College of Sc. Imperial University of Tokyo, agosto 1908, art. 15); *Preliminary note on a new element allied to molybdenum* Ibid., art. 16).

senza di cloruro ammonico, produsse un precipitato simile a quello ottenuto in eguali condizioni dalla soluzione cloridrica del minerale.

Nel modo descritto abbiamo esaminato 20 gr. circa di molibdenite bene polverizzata; ma non si è mai formato il precipitato caratteristico giallo pallido che l'Ogawa ha osservato nell'esaminare la molibdenite del Giappone. Il residuo della calcinazione del minerale era quasi interamente solubile in ammoniaca; e ciò che rimaneva, era costituito da minerale indecomposto e da tracce minime di ferro, quali si possono acquistare facilmente dai reattivi.

A proposito della purezza che ordinariamente presenta la molibdenite, è da notarsi che il de Grammont (1) ha osservato nello spettro della molibdenite solo le linee del molibdeno. Fu fatta l'analisi quantitativa del minerale.

Lo zolfo è stato pesato a solfato baritico, e il molibdeno a triossido. Per l'ossidazione dello zolfo fu seguìto il metodo consigliato dal Carnot (2), che consiste nel far passare una corrente di cloro in una soluzione calda di potassa in cui il minerale polverizzato si trova in sospensione.

L'ossidazione del metallo e dello zolfo avviene con molta rapidità, e ben presto tutto è sciolto. Si acidifica con acido cloridrico, si scalcia il cloro scaldando debolmente, e si aggiunge cloruro baritico, lasciando deporre il solfato baritico a temperatura ordinaria, per evitare la precipitazione dell'acido molibdico.

La determinazione del molibdeno come triossido è stata fatta seguendo le norme date dal Treadwell (3).

Dello zolfo fu fatta una sola determinazione: del molibdeno due, avendo nella prima avuto causa di perdita per essere la calcinazione avvenuta a temperatura un po' troppo elevata.

I valori trovati sono riportati nelle colonne I e II; i teorici, nella III.

	I	II	III
Mo	57.84	59.30	59.95
S	41.20	41.20	40.04
	99.04	100.50	100.00

Biologia. — *Nuovi contributi allo sviluppo dei Murenoidi.* Nota del Socio B. Grassi.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

(1) *Analyse spectrale des minéraux.* (Bull. soc. franc. de mineral. 1895, 18, 274.
(2) A. Carnot, *Traité d'analyse des substances minérales*, tom. II, pag. 770. Paris, 1904.
(3) *Kurzes Lehrbuch des analytischen Chemie*, 2, 182.

Anatomia. — *Sopra l'organo di senso laterale delle Salpidae*. Memoria del Socio F. Todaro.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie*.

Cristallografia. — *Determinazione, col metodo della riflessione totale, dei tre indici principali di un cristallo con una sezione qualsiasi*. Nota del Corrispondente C. Viola.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sopra una trasformazione classica di Sophus Lie*. Nota del dott. Enrico Bompiani, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

1. Una nota trasformazione di Sophus Lie [1] fa corrispondere ai punti di uno spazio S (x, y, z) le rette isotrope [2] di un altro spazio S′ (X, Y, Z): ai punti di S′ corrispondono in S le rette di un complesso lineare Γ.

La corrispondenza fra gli elementi nominati dei due spazî è posta analiticamente dalle formole:

$$\begin{cases} X + iY + xZ + z = 0 \\ x(X - iY) - Z - y = 0 \end{cases}, \qquad (i = +\sqrt{-1});$$

il complesso Γ ha l'equazione:

$$x\,dy - y\,dx + dz = 0.$$

Le proprietà più importanti della trasformazione, delle quali avremo occasione di servirci, sono raccolte nella tabella seguente:

[1] Cfr. S. Lie, *Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugel-Complexe*,... Math. Ann., Bd. V, 1872, o la redazione di Lie-Scheffers nella *Geometrie der Berührungstransformationen*. Leipzig, 1896, Abschn. II, cap. 10 e 14; o infine la Nota di Cremona, *Sulla corrispondenza fra la teoria dei sistemi di rette e la teoria delle superficie*. Atti Acc. Lincei, ser. 2ª, tomo III, 1876.

[2] Cioè appoggiate all'assoluto di S′ (« Minimalgeraden » dei Tedeschi).

Spazio S.	Spazio S'.
1) Retta (e sua polare reciproca rispetto a Γ, considerate come direttrici di una congruenza lineare); retta del complesso.	Sfera (considerata come luogo dei suoi punti); sfera nulla (cono isotropo).
2) Faccetta [1] (e sua polare reciproca rispetto a Γ).	Faccetta.
3) Faccette di una superficie ω_1 (e le reciproche rispetto a Γ, formanti una superficie ω_2).	Faccette di una superficie Ω.
4) Faccetta di una superficie ω_1 considerata insieme al fascio delle tangenti ivi (e alle reciproche rispetto a Γ).	Faccetta di una superficie, considerata insieme al fascio delle sfere tangenti alla superficie nel suo punto di contatto.
5) Asintotiche su ω_1 (e sulla reciproca ω_2).	Linee di curvatura su Ω.

La proprietà enunciata in 4) fa corrispondere alle tangenti in un punto di ω_1 le sfere tangenti nel punto corrispondente di Ω; tuttavia la corrispondenza fra punti sulle due superficie subordina una corrispondenza tra i fasci di tangenti ivi. Questa sarà anzi una proiettività, e. per la proprietà 5), essa muterà l'involuzione delle tangenti determinata in un punto di ω_1 dalle tangenti asintotiche, in quella determinata dalle tangenti di curvatura nel punto corrispondente di Ω. E poichè alle linee del complesso lineare Γ su ω_1 corrispondono linee nulle su Ω, ne risulta fissata la corrispondenza fra le due involuzioni nominate.

Riassumendo:

La trasformazione di Lie fra i punti delle due superficie ω_1 e Ω pone in corrispondenza proiettiva le involuzioni delle tangenti aventi come rette doppie le tangenti asintotiche in un punto di ω_1, e rispettivamente le tangenti di curvatura nel punto corrispondente di Ω. Questa corrispondenza è tale che al doppio sistema di curve nulle su Ω corrisponde su ω_1 (e su ω_2) il sistema delle curve di Γ e il sistema ad esse coniugato (nel senso di Dupin).

È scopo della presente Nota l'assegnare una trasformazione geometrica che permetta di costruire, in termini finiti, la nominata corrispondenza fra le due involuzioni (nn. 2 e 3); e l'esporre (nn. 4 e 5) alcune proprietà di una superficie considerata in rapporto ai complessi lineari di rette nello spazio. Queste proprietà, come del resto la trasformazione stessa di Lie, sono casi particolari di teoremi più generali che formeranno oggetto di un prossimo lavoro.

[1] Locuzione adottata dal Bianchi (v. per es. Atti del IV Congr. intern. dei Matematici, vol. II, pag. 264): traduce il « Flächenelement » dei Tedeschi.

2. Si considerino le rigate contenute in Γ, tangenti ad ω_1 (e ad ω_2) secondo curve uscenti da un punto della superficie ω_1 con la stessa tangente: queste rigate hanno in comune una generatrice e, di più, sono raccordate (1) lungo essa. Le schiere quadriche (contenute in Γ) osculatrici a queste rigate lungo la generatrice comune descrivono una congruenza lineare (2) le cui direttrici sono tangenti ad ω_1 e ad ω_2 nei punti della generatrice scelta. Proviamo questo teorema per via analitica.

Le curve della superficie ω_1, $z = z(x, y)$, uscenti da un punto (x, y, z) con una tangente assegnata (curve di contatto di quelle rigate con la superficie ω_1) sono fissate ponendo $y = y(x)$, con la condizione che il valore di $y' = \frac{dy}{dx}$ relativo al punto fissato (x, y, z) abbia per tutte queste curve lo stesso valore (saranno invece distinti da curva a curva i valori di y'', y''', ecc.). Sia (3) (x, y, z, p, q) la faccetta in esame di ω_2; la faccetta reciproca rispetto a Γ ha le coordinate

$$\xi = -q \ , \ \eta = p \ , \ \zeta = z - xp - yq \ , \ p' = y \ , \ q' = -x \ .$$

La retta di Γ appartenente alle due faccette è definita dai punti (x, y, z), (ξ, η, ζ). Proveremo il nostro asserto mostrando che la retta di Γ congiungente i due punti:

$$\left(x + dx + \frac{1}{2} d^2x \ , \ y + dy + \frac{1}{2} d^2y \ , \ z + dz + \frac{1}{2} d^2z\right),$$

$$\left(\xi + d\xi + \frac{1}{2} d^2\xi \ , \ \eta + d\eta + \frac{1}{2} d^2\eta \ , \ \zeta + d\zeta + \frac{1}{2} d^2\zeta\right)$$

(i differenziali che compariscono in essi van calcolati prendendo x come variabile indipendente, quindi $d^2x = 0$, e servendosi delle relazioni $y = y(x)$, $z = z(x, y)$ e delle ultime scritte che dànno ξ, η, ζ) incontra la faccetta (x, y, z, p, q) in un punto $(x + \delta x \ , \ y + \delta y \ , \ \zeta + \delta\zeta)$ dipendente solo dal valore di y' e non da y'': la tangente della faccetta di ω_1 definita da $\frac{\delta y}{\delta x}$ sarà una delle direttrici cercate; l'altra si otterrebbe operando nello stesso modo su ω_2.

(1) Due rigate si dicono raccordate lungo una generatrice comune quando hanno gli stessi piani tangenti in tutti i punti di essa.

(2) Questa prima parte del teorema è già nota (cfr. Koenigs, *Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé*. Ann. de l'Ec. Norm. Sup., 1882 (2), tomo II). Per il nostro scopo è invece essenziale la determinazione delle direttrici della congruenza. La dimostrazione che segue include naturalmente quella del teorema di Koenigs.

(3) Le quantità $x, y, z, p, q, -1$, sono ordinatamente le coordinate del punto della faccetta, e quantità proporzionali ai coseni direttori della normale al suo piano. Per le formole riportate in questo numero, cfr. Lie-Scheffers, loc. cit., pp. 467 e 468.

La direzione $\frac{\delta y}{\delta x}$ è individuata dall'annullarsi (dei termini d'ordine più basso) del determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x+\delta x & y+\delta y & z+p\delta x+p\delta y & 1 \\ x+dx & y+dy+\frac{1}{2}d^2y & z+pdx+qdy+\frac{1}{2}d^2z & 1 \\ -\left(q+dq+\frac{1}{2}d^2q\right) & p+dp+\frac{1}{2}d^2p & z-xp-yq-xdp-ydq- & 1 \\ & & -\frac{1}{2}\{dx\,dp+dy\,dq+xd^2p+yd^2q\} & \end{vmatrix}$$

e, quindi, dall'equazione

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{\delta y}{\delta x} & 0 \\ 1 & y' & \frac{1}{2}(r+2sy'+ty'^2) \\ -(q+x) & p-y & (p-y)(s+ty')-(q+x)(r+sy') \end{vmatrix} = 0$$

(p, q, r, s, t sono i simboli di Monge per indicare le derivate di z rispetto ad x e ad y).

Introduciamo la direzione

$$\overline{y}' = -\frac{r+sy'}{s+ty'}$$

coniugata (nel senso di Dupin) alla y' sulla faccetta (x, y, z, p, q) di ω_1, e la direzione

$$y'_\Gamma = \frac{y-p}{q+x}$$

della retta del complesso Γ appartenente alla faccetta. L'equazione precedente si scrive:

$$\frac{\delta y}{\delta x}y'_\Gamma + y'\cdot\overline{y}' - \frac{1}{2}\left(\frac{\delta y}{\delta x}+y'_\Gamma\right)(y'+\overline{y}') = 0;$$

essa esprime che le quattro rette della faccetta uscenti dal punto (x, y, z) nelle direzioni $\frac{\delta y}{\delta x}$, y'_Γ, y', $\overline{y}'$ formano un gruppo armonico; con una nota-

zione abituale scriveremo la relazione che definisce $\frac{\delta y}{\delta x} = y'_\delta$:

$$(y'_\delta, y'_\Gamma, y', \overline{y}') = -1.$$

Osserviamo che in essa:

1) non è contenuto y'':

2) y' e $\overline{y}'$ hanno ufficio scambievole.

Per enunciare brevemente il risultato ottenuto diciamo *schiera quadrica osculatrice ad* ω_1 la schiera quadrica (di Γ) osculatrice ad una rigata di Γ circoscritta ad ω_1; si ha così:

Le schiere quadriche di Γ *osculatrici ad* ω_1 *secondo una stessa tangente* (*e ad* ω_2 *secondo la tangente reciproca*) *appartengono ad una congruenza lineare*: *due tangenti coniugate* (*nel senso di Dupin*) *dànno origine alla stessa congruenza. Una sua direttrice è coniugata armonica della retta di* Γ, *appartenente alla faccetta di* ω_1, *rispetto alle due tangenti coniugate; l'altra direttrice si ottiene operando analogamente su* ω_2.

3. Osserviamo che il teorema ora stabilito sulle schiere quadriche osculatrici alle rigate di Γ, tangenti ad ω_1, e raccordate lungo una generatrice, si muta, con la trasformazione di Lie, nel teorema di Meusnier relativo ai circoli osculatori alle curve di una superficie uscenti da un suo punto con la stessa tangente: infatti questo teorema afferma che i circoli nominati appartengono ad una sfera tangente alla superficie nel punto (che dirò sfera di Meusnier relativa alla tangente scelta). Si sa anzi di più che ogni sfera tangente alla superficie in un punto risulta sfera di Meusnier per due tangenti, simmetriche rispetto a quelle di curvatura nel punto stesso.

Siamo ora in grado di completare nel senso accennato, la trasformazione di Lie. Si parta da una coppia di tangenti coniugate (y' e $\overline{y}'$) in un punto di ω_1 (e dalle reciproche tangenti ad ω_2): ad esse, considerate in rapporto al complesso lineare Γ, il teorema precedente fa corrispondere una retta pure tangente nel punto ad ω_1, e definita dal doppio rapporto:

$$(y'_\delta, y'_\Gamma, y', \overline{y}') = -1.$$

A questa retta (e alla reciproca rispetto a Γ, tangente ad ω_2) la trasformazione di Lie fa corrispondere una sfera tangente ad Ω, che riesce sfera di Meusnier per due tangenti simmetriche rispetto a quelle di curvatura nel punto di contatto.

Diremo questa coppia di tangenti (di Ω) *corrispondente* a quella di partenza. La nostra corrispondenza pone dunque in relazione proiettiva l'involuzione delle tangenti determinata in un punto di ω_1 (e di ω_2) dalle tangenti asintotiche e qnella determinata nel punto corrispondente di Ω dalle

tangenti di curvatura. Ma di più, poichè la sfera di Meusnier relativa alle tangenti isotrope in un punto di Ω è il cono isotropo con vertice nel punto, ad essa corrisponde nella trasformazione di Lie la retta, tangente ad ω_1, y'_Γ: quindi $y'_\delta \equiv y'_\Gamma$ e allora y' e $\overline{y}'$ sono, per la relazione precedente, y'_Γ stessa e la direzione coniugata.

Questa trasformazione degli intorni di due punti corrispondenti è appunto determinata dalla trasformazione di Lie fra i punti stessi: perchè alla retta congiungente dei due punti infinitamente vicini di ω_1 corrisponde (con la nostra trasformazione) la retta congiungente i due punti corrispondenti su Ω.

È così stabilito di nuovo il risultato del n. 1, e di più che la corrispondenza fra le due involuzioni definite al n. 1 si può costruire geometricamente così:

Data una coppia di tangenti coniugate (nel senso di **Dupin**) *in un punto di* ω_1 *si costruisca la quarta armonica dopo esse e la retta ivi tangente del complesso* Γ: *la trasformazione di Lie muta la retta costruita in una sfera, tangente ad* Ω, *che risulta sfera di Meusnier per due tangenti simmetriche rispetto a quelle di curvatura nel punto di contatto. La coppia di tangenti ottenuta corrisponde a quella di partenza nella proiettività determinata dalla trasformazione di Lie negli intorni di due punti corrispondenti di* ω_1 *e di* Ω.

E viceversa.

4. Il teorema del n. 2, nel linguaggio infinitesimale, ci dice che una tangente in un punto di ω_1 e la retta del complesso Γ ivi tangente ad ω_1 individuano una congruenza lineare alla quale appartengono le rette di Γ tangenti alla superficie nell'intorno del 1° e del 2° ordine nella direzione della tangente fissata. Ci si può domandare se alla stessa congruenza appartiene qualche retta di Γ, tangente ad ω_1 nell'intorno del 3° ordine. Seguendo lo stesso procedimento tenuto prima, bisognerà annullare il determinante (1):

$$\begin{vmatrix} 1 & y'_\delta & 0 \\ 1 & y' + \frac{1}{2}y''\,dx + \frac{1}{3!}y'''\,dx^2 & \mathrm{M} \\ -(q+x) - \left(dq + \frac{1}{2}d^2q + \frac{1}{3!}d^3q\right) & p - y + dp + \frac{1}{2}d^2p + \frac{1}{3!}d^3p & \mathrm{N} \end{vmatrix}$$

(1) Il simbolo $\frac{dz}{dx}$ sta in luogo di $p + qy'$; analogamente vanno calcolati

$$\frac{d^2z}{dx^2}\,,\ \frac{d^2h}{dx^2}\,,\ \frac{d^2q}{dx^2}\,,\ \ldots$$

ove:

$$M = \frac{1}{2}(r + 2sy' + ty'^2) + \frac{1}{3!}\left(\frac{d^3z}{dx^3} - qy'''\right)dx$$

$$N = (p - y)(s + ty') - (q + x)(r + sy') -$$

$$- \frac{1}{2}\left[dp + y'dq + (q + x)\frac{d^2p}{dx^2}dx - (p - y)\frac{d^2q}{dx^2}dx\right] +$$

$$+ \text{termini di } 2^\circ \text{ ordine.}$$

Si osservi però che il determinante formato con i termini finiti è identicamente nullo $\left(\text{a causa della determinazione di } y'_2 = \frac{\delta y}{\delta x}\right)$ sicchè bisognerà annullare i termini infinitesimi del 1° ordine rispetto a dx.

Senza scriverli per disteso osserviamo che:

1) In essi non figura la y''' (poichè entra solo apparentemente nel termine $\frac{d^3z}{dx^3} - qy'''$, oppure moltiplicata per infinitesimi del 2° ordine);

2°) La y'' vi comparisce linearmente;

uguagliandoli a zero si ha un'equazione differenziale lineare in y'': dunque, fissato un punto di ω_1 e una tangente ivi esiste, in generale, una ed una sola rigata di Γ tangente ad ω_1 e tale che quattro sue generatrici consecutive si appoggiano ad una tangente di ω_1.

Conviene considerare insieme alla rigata di Γ le due falde della rigata flecnodale e i due rami della curva flecnodale [1] per enunciare in termini finiti il risultato ottenuto.

Esistono ∞^2 *rigate di un complesso lineare* Γ *circoscritte ad una superficie* ω_1 (*e alla reciproca rispetto a* Γ, ω_2) *lungo* (*un ramo del* =) *la loro curva flecnodale: la rigata flecnodale relativa ad una di esse riesce pure tangente* (*con una sua falda*) *ad* ω_1 *lungo la curva stessa; una di queste* (∞^2) *rigate è completamente individuata da un punto di* ω_1 *e da una sua tangente ivi* [2].

[1] Rigata flecnodale è il luogo delle tangenti quadripunte della rigata data, curva flecnodale il luogo dei punti di contatto. Cfr. Wilczynski, *Projective differential Geometry of curves and ruled surfaces*, pag. 150, Leipzig, 1906.

[2] Questo risultato è ben d'accordo con un teorema del Wilczynski, loc. cit., pag. 233: « Se in ogni punto della curva flecnodale di una rigata si considera la generatrice della superficie, la tangente quadripunta, la tangente alla curva flecnodale e la coniugata armonica di questa rispetto alle prime due, il luogo di quest'ultima retta è una sviluppabile ». Per il nostro teorema questa è la sviluppabile circoscritta ad ω_1 lungo la curva flecnodale della rigata in esame (di Γ).

E tenendo conto dell'arbitrarietà del complesso Γ (variando il quale varia di conseguenza ω_2, che non ha per noi interesse) si ha pure:

Esistono ∞^7 *rigate tangenti ad una superficie* ω_1 *lungo un ramo della loro curva flecnodale e tali che le generatrici di una di esse appartengono tutte ad un medesimo complesso lineare. La rigata flecnodale di ciascuna di queste rigate è tangente* (*con una sua falda*) *ad* ω_1 *lungo la curva stessa* (1).

5. Applicando alle rigate del penultimo enunciato la trasformazione del n. 3, si ottengono su Ω (in S') curve aventi in ogni punto la sfera osculatrice tangente ivi ad Ω. Per queste curve la sfera osculatrice ha un ufficio analogo a quello che ha il piano osculatore per le curve asintotiche; esse sono state considerate dal Darboux (2).

Meccanica. — *Sulle onde superficiali dovute a particolare conformazione del fondo.* Nota di U. Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

In una recente Nota (3) ho caratterizzato l'intumescenza del pelo libero, in un canale scoverto abbastanza rapido, sul cui fondo è rigidamente connessa (in una determinata sezione trasversale e per tutta la larghezza) una traversa verticale.

Si tratta ora di studiare, in condizioni corrispondenti, l'andamento del pelo libero, quando sul fondo — invece di una sola traversa — abbiamo una periodica distribuzione di traverse, identiche fra loro.

È ovvio che, supposto ancor qui il regime permanente, il moto liquido ha carattere periodico: ripetendosi gli elementi del moto identicamente in punti situati sopra una medesima retta parallela al fondo ed alle sponde del canale, e distanti fra loro di λ; λ designi l'intervallo fra traversa e traversa.

(1) Vogliamo porre a confronto anche questo teorema con un altro noto (Wilczynski, loc. cit., pag. 232): « Una curva dello spazio può esser considerata come un ramo della curva flecnodale per una famiglia di rigate dipendente da una funzione arbitraria ».

Data una curva sopra ω_1, rimane quindi determinata una rigata dalle condizioni di possedere la curva come flecnodale e di riuscire tangente alla superficie ω_1 lungo essa. Esistono, relativamente alla superficie ω_1, infinite di queste rigate, dipendenti da una funzione arbitraria (come la curva su ω_1): fra esse le ∞^7 del teorema sono caratterizzate dalla proprietà che le generatrici di ciascuna rigata appartengono ad uno stesso complesso lineare.

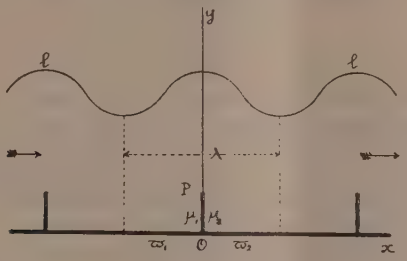
(2) C. R. de l'Académie des Sciences, t. LXXIII, pag. 732-736, 1871; cfr. pure Enneper, *Bemerkungen über die Differentialgleichungen* ... Gött. Nachr., 1871, p. 577-583.

(3) *Sull'intumescenza del pelo libero nei canali a fondo accidentato.* Questi Rendiconti, seduta del 5 maggio 1912.

La questione non sembra priva di interesse: sia in virtù dei risultati semplici ed espressivi cui essa dà luogo, e che presentano una notevole analogia con quelli relativi alla classica teoria di Airy, sui moti ondosi; sia perchè su essa non disdegnarono soffermarsi menti cospicue: basti citare il nome di Lord Kelvin (1).

In questa Nota mi propongo di assegnare l'integrale generale del moto, trattando il problema piano irrotazionale, e supponendo il campo libero da forze. Preciserò in seguito i limiti entro cui si può ritenere valida quest'ultima ipotesi, trattando il caso particolarmente interessante che, nella teoria dei moti ondosi, fa riscontro alle cosidette *onde brevi*.

1. Indichino, al solito: u e v le componenti della velocità nel punto generico (x, y) — il sistema di riferimento è quello indicato in figura —; φ il potenziale di velocità; ψ la funzione di corrente.



Se si pone

$$x + iy = z \quad , \quad u - iv = w \quad , \quad \varphi + i\psi = f , \tag{1}$$

w ed f sono funzioni di $z = x + iy$, legate fra loro dalla relazione

$$\frac{df}{dz} = w . \tag{2}$$

Poniamo ulteriormente

$$w = e^{-i\omega} = e^{-i(\vartheta + i\tau)} = e^{\tau - i\vartheta} , \tag{3}$$

convenendo che, per $z = 0$ [dove $V = |w| = 0$] sia $\omega = \infty$.

Come si vede, ϑ definisce l'angolo che le linee di flusso fanno in ogni punto con l'asse x, mentre τ è il logaritmo neperiano di $V = |w|$. Notiamo

(1) *Stationary Waves on the Surface produced by Equidistant Ridges on the Bottom.* Philosophical Magazine, vol. XXIII, 1887, pp. 52-87; oppure Math. and Physical Papers, Cambridge. University Press, 1910, vol. IV, pp. 296-302. Lord Kelvin tratta il problema *in prima approssimazione e tiene conto della gravità*. Nel suo procedimento si rivelano però dei veri acrobatismi: solo sapendo a quale possente ginnasta intellettuale essi sono dovuti, si può presumere il successo finale. Nel caso nostro, tratteremo il problema *rigoroso*, ponendoci in condizioni (che preciserò in seguito) in cui *è lecito prescindere dalla gravità*.

che ϑ va contato fra 0 e π, positivamente nel verso $x \longrightarrow y$, negativamente nell'opposto.

L'ipotesi che le traverse sieno periodicamente disposte sul fondo del canale ad intervalli di λ una dall'altra, porta come naturale conseguenza che il moto (permanente) della corrente abbia carattere periodico, con periodo λ.

Ciò viene analiticamente tradotto nella circostanza che tanto la funzione $w(z) = u(x, y) - iv(x, y)$, quanto la $\omega(z) = \vartheta(x, y) + i\tau(x, y)$ ammettono il periodo reale λ. Segue da (2) che anche la f ammette allora un periodo reale, che indicheremo con ν. A norma della (2) stessa e della (3) λ e ν sono legate fra loro dalla seguente relazione

$$\lambda = \int_0^{\nu} \frac{df}{w} = \int_0^{\nu} e^{i\omega}\, df. \tag{4}$$

È facile vedere che ν è essenzialmente positiva. Basta notare infatti: a) che ν non è altro che la differenza (costante) $\varphi(x + \lambda, y) - \varphi(x, y)$, qualunque sia il punto (x, y) del campo del moto; b) che il fondo $y = 0$ è linea di flusso; c) che lungo ogni linea di flusso φ va sempre crescendo (nel verso del flusso). Da ciò scende quanto si voleva dimostrare.

2. Giova tenere presenti le condizioni ai limiti. Esse consistono nello esprimere che tanto il fondo quanto il pelo libero l sono linee di flusso. Analiticamente questo equivale a dire che su ciascuna di esse è ψ costante. Preso $\psi = 0$ sul fondo e $\psi = H > 0$ sopra l, H rappresenta, com'è ben noto, la portata della corrente.

Sopra ogni altra linea di flusso è $0 < \psi < H$. Per questo e pel fatto che lungo ciascuna linea di flusso φ varia da $-\infty$ fino a $+\infty$, possiamo concludere che la $f = f(z)$ consente di rappresentare il campo del moto nella striscia $\psi = 0$, $\psi = H$ del piano $f = \varphi + i\psi$. Notiamo ancora che, trattandosi di moto irrotazionale, permanente, in assenza di forze, sul pelo libero l, $V = |w|$ dev'essere costante. Prendendo questa costante eguale a 1, dovremo avere, per la (3),

$$\tau = 0, \text{ sopra } l. \tag{5}$$

3. Poniamo ancora

$$\zeta = q e^{-i\frac{2\pi f}{\nu}} \quad ; \quad q = e^{-\frac{2\pi H}{\nu}} \; ; \tag{6}$$

con che $q < 1$.

Come facilmente si vede, ogni funzione $\omega(f)$, regolare nella striscia $0 < \psi < H$ e avente per periodo ν, diviene per le (6), funzione dell'argomento ζ uniforme e regolare entro la corona circolare $q < |\zeta| < 1$.

Alla circonferenza $|\zeta|<1$ (considerata una sola volta a partire dal punto -1, nel senso $-1, i$, ecc.) corrisponde, nel piano $z=x+iy$, la parte di pelo libero l compresa tra le verticali $x=-\frac{1}{2}\lambda$, $x=\frac{1}{2}\lambda$; mentre alla circonferenza $|\zeta|=q$ corrisponde la parte di fondo compresa tra le medesime verticali.

In modo preciso, posto

$$\zeta_1=qe^{i\sigma_0} \quad , \quad \zeta_2=qe^{-i\sigma_0} \qquad (0\leq\sigma_0\leq\pi), \tag{7}$$

agli archi $(-q,\zeta_1)$, (ζ_1,q) , (q,ζ_2) , $(\zeta_2,-q)$ corrispondono rispettivamente (vedi figura) ϖ_1 , μ_1 , μ_2 , ϖ_2.

Ciò posto, riportandoci alla variabile $\zeta=\xi+i\eta$ e tenuto conto dell'andamento del fondo del canale nel tratto accennato, nonchè della (5), si ha: *la funzione* $\omega(\zeta)=\vartheta+i\tau$ *dev'essere regolare per* $q<|\zeta|<1$; *reale per* $|\zeta|=1$; *infine sopra la circonferenza* $|\zeta|=q$ *la sua parte reale* ϑ *deve comportarsi nel modo qui sotto indicato*:

$$\begin{cases} \vartheta=0 \text{ sopra gli archi } (-q,\zeta_1) \text{ e } (-q,\zeta_2); \\ \vartheta=\dfrac{\pi}{2} \text{ sopra } (q,\zeta_1) \quad ; \quad \vartheta=-\dfrac{\pi}{2} \text{ sopra } (q,\zeta_2). \end{cases} \tag{8}$$

4. Si tratta ora di costruire la funzione ω soddisfacente a tutte le condizioni specificate.

Poichè la $\omega(\zeta)$ deve essere regolare entro la corona circolare accennata, sarà ad essa applicabile lo sviluppo del Laurent

$$\omega(\zeta)=a_0+\sum_1^\infty{}_n\,(a_n\zeta^n+b_n\zeta^{-n}); \tag{9}$$

i coefficienti a e b (in generale complessi) devono rendere convergente la serie per $q<|\zeta|<1$, e in pari tempo vanno valutati in guisa che la ω soddisfi, al contorno, alle condizioni volute. Affinchè $\omega(\zeta)$ sia reale per $|\zeta|=1$ basta manifestamente che a_0 sia reale e che a_n e b_n sieno complessi coniugati.

Posto così $a_n=\alpha_n+i\beta_n$, $b_n=\alpha_n-i\beta_n$, con α_n e β_n costanti reali, la precedente espressione di $\omega(\zeta)$ soddisfa alla condizione relativa al contorno $|\zeta|=1$.

Posto ancora in (9) $\zeta=qe^{i\sigma}$, facilmente si vede che alle (8) si soddisfa prendendo

$$a_0=\alpha_n=0 \quad , \quad \beta_n=\frac{\cos n\sigma_0-1}{n(q^n+q^{-n})}.$$

Pertanto la (9) diviene

$$\omega(\zeta)=i\sum_1^\infty{}_n\,\frac{\cos n\sigma_0-1}{n}\,\frac{\zeta^n-\zeta^{-n}}{q^n+q^{-n}}, \tag{9'}$$

che rappresenta l'integrale generale della nostra questione.

5. Allo sviluppo (9′) si può sostituire uno sviluppo, assai comodo, di prodotti infiniti.

Basta notare che, essendo $q < 1$, si può scrivere

$$\frac{1}{q^n + q^{-n}} = \sum_1^\infty{}_j (-1)^j q^{(2j+1)n};$$

e che inoltre si può sostituire a $\cos n\sigma_0$ l'equivalente espressione

$$\tfrac{1}{2}(e^{in\sigma_0} + e^{-in\sigma_0}).$$

Si ottiene così senza nessuna difficoltà il seguente sviluppo

$$(9'') \qquad \omega(\zeta) = i \log \frac{(1 - q\zeta)\left(1 - \frac{q^3}{\zeta}\right)(1 - q^5\zeta) \ldots}{\left(1 - \frac{q}{\zeta}\right)(1 - q^3\zeta)\left(1 - \frac{q^5}{\zeta}\right) \ldots} +$$

$$+ \frac{i}{2} \log \frac{\left(1 - 2\frac{q}{\zeta}\cos\sigma_0 + \frac{q^2}{\zeta^2}\right)(1 - 2q^3\zeta\cos\sigma_0 + q^6\zeta^2) \ldots}{(1 - 2q\zeta\cos\sigma_0 + q^2\zeta^2)\left(1 - 2\frac{q^3}{\zeta}\cos\sigma_0 + \frac{q^6}{\zeta^2}\right) \ldots}.$$

Di questa ci varremo in una prossima Nota.

Meccanica. — *Onde brevi causate da accidentalità periodiche del fondo.* Nota di U. Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Meccanica. — *Sopra le vibrazioni normali di un corpo elastico immerso in un fluido.* Nota di E. Laura, presentata dal Socio C. Somigliana.

Le due Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Le equazioni generali per la Statica e la Dinamica dei sistemi materiali ad n dimensioni ed a curvatura costante, nell'analisi di Grassmann.* Nota di A. Del Re, presentata dal Socio V. Volterra.

1. In uno spazio ad n dimensioni ed a curvatura costante S_n, i cui punti siano riferiti, alla maniera di Grassmann, ad una piramide di $n+1$ vertici indipendenti $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$ mutuamente normali, e nei loro moduli pure normali $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$, e sia perciò

$$(1) \qquad x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_{n+1} e_{n+1}$$

l'espressione che dà un punto qualunque x di *coordinate* $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$, sarà

$$(2) \qquad (x|x) = \sum_{i=1}^{i=n+1} x_i^2 (e_i|e_i) = 0\,, \quad \text{ovvero} \quad \sum_{i=1}^{i=n+1} \frac{x_i^2}{\alpha_i^2} = 0$$

l'equazione della quadrica dei punti a modulo nullo; e noi supporremo che questa rappresenti altresì l'*assoluto* (quando proprio occorrerà servirsi della ipotesi che S_n sia ellittico o iperbolico).

Ogni punto x non giacente su quella quadrica sarà supposto a modulo unitario, finchè non risulti il contrario dal contesto del ragionamento; epperò, quando x dipende da una variabile indipendente t, sarà:

$$(3) \qquad (x|dx) = 0 \quad , \quad (dx|dx) + (x|d^2x) = 0$$

ove è (d essendo simbolo di differenziale):

$$(4) \qquad dx = dx_1 \cdot e_1 + dx_2 \cdot e_2 + \cdots + dx_{n+1} \cdot e_{n+1} \quad , \quad d^2x = d^2x_1 \cdot e_1 + \cdots$$

Se, in S_n, si prende come espressione di una forza agente in un punto x il prodotto xy di x per un altro punto y, come espressione dello spostamento *elementare* dovuto ad un cambiamento di x in $x + dx$ il prodotto $x(x + dx) = xdx$, come *definizione* del *lavoro elementare* di xy nello spostamento xdx la funzione scalare

$$(5) \qquad (xy|xdx)\,,$$

che, per essere x, y nei loro moduli normali, assume la forma semplice

$$(6) \qquad \pm (y|dx)\,,$$

e se si tien conto che, negli spazî ellittici o iperbolici, per intervalli infi-

nitamente piccoli, valgono i teoremi della geometria euclidea, si può istituire una teoria generale in S_n che contiene, per $n = 3$, l'ordinaria Statica e l'ordinaria Dinamica.

2. Intanto, a parziale giustifica delle nozioni qui assunte, si osservi che, se S_n è euclideo, e per y si prende il *vettore* u della forza F applicata in x, sicchè sia $F = xu$, e se $i_1, i_2, \dots, i_n$ sono n vettori unitarî due a due ortogonali fra loro ed e un punto arbitrario al finito di modulo 1, si potrà all'espressione (1) di x sostituire la seguente

$$x = e + x_1 i_1 + x_2 i_2 + \cdots + x_n i_n , \tag{7}$$

ove $x_1, x_2, \dots, x_n$ sono le coordinate cartesiane ortogonali di x rispetto agli n assi $ex_1, ex_2, \dots, ex_n$ e prendere per u l'espressione

$$u = u_1 i_1 + u_2 i_2 + \cdots + u_n i_n , \tag{8}$$

ove $u_1, u_2, \dots, u_n$ sono le *componenti* di u, epperò pure quelle della forza F, secondo i medesimi assi. Allora, come dalla (7) si ricava

$$dx = dx_1 . i_1 + dx_2 . i_2 + \cdots + dx_n . i_n , \tag{9}$$

così da (8) e (9) si ricaverà

$$\cos(u , dx) = \frac{(u|dx)}{\sqrt{(u\ u)}\ \sqrt{(dx|dx)}} ;$$

ovvero, per essere

$$(u|u) = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + n_n^2 = F^2$$

$$(dx|dx) = dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2 = ds^2 :$$

$$\cos(u , dx) = \cos(F , ds) = \frac{(u , dx)}{F\, ds} ,$$

avendo messo F al posto di u, come usa farsi, ed avendo indicato con ds l'arco elementare descritto dal punto x nello spostamento dx Da tale equazione si deduce per $(u|dx)$ che, nel caso presente sostituisce la $(y|dx)$ del caso generale, la espressione

$$(u|dx) = F\, ds . \cos(F , ds) ,$$

che è appunto quella del lavoro elementare della forza F applicata nel punto x durante lo spostamento elementare ds, nel senso dell'ordinaria Statica.

[*N. B.* La determinazione $+(y|dx)$ conviene agli spazî ellittici; nel caso di spazî iperbolici, la determinazione $+(y|dx)$ conviene a punti dello *spazio* propriamente detto, e la determinazione $-(y\ dx)$ ai punti dell'*antispazio*, o *spazio ideale*].

3. Consideriamo ora un punto x in movimento; se, come avvertimmo, teniamo conto che negli spazî ellittici, e iperbolici, per intervalli infinitamente piccoli valgono i teoremi della geometria euclidea, troviamo che, supponendo $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ funzioni di una variabile t, che si dirà *tempo*, le espressioni

$$x\frac{dx}{dt} \quad , \quad x\frac{d^2x}{dt^2}$$

rappresentano *completamente* la *velocità* e *l'accelerazione* del punto x al tempo t. Quanto alla velocità *come misura effettiva* del rapporto fra lo spostamento subìto dal punto x ed il tempo dt nel quale è seguìto, va distinto esplicitamente il caso in cui lo spazio è ellittico da quello in cui è iperbolico.

Per fare uno spazio ellittico si supporrà $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n+1} = 1$; per farlo iperbolico si prenderà $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \sqrt{-1}$, $\alpha_{n+1} = 1$. Allora, indicando con ds l'arco elementare di traiettoria descritta dal punto x, avremo

$$\frac{ds}{\gamma} = \operatorname{sen}\ \frac{xdx}{\gamma} = \sqrt{(xdx|xdx)} = \sqrt{(dx|dx)} \text{ nel } 1^\circ \text{ caso}$$

$$\frac{ds}{\gamma} = \operatorname{senh}\ \frac{xdx}{\gamma} = \sqrt{-(xdx|xdx)} = \sqrt{-(dx|dx)} \text{ nel } 2^\circ \text{ caso.}$$

Contemporaneamente per la richiesta misura della velocità si avrà

$$(10) \quad v = \gamma\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\middle|\frac{dx}{dt}\right)} = \gamma\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{\partial t}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_{n+1}}{dt}\right)^2}$$

nel 1° caso, e

$$(10') \quad v = \gamma\sqrt{-\left(\frac{dx}{dt}\middle|\frac{dx}{dt}\right)} =$$

$$= \gamma\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dx_{n+1}}{dt}\right)^2}$$

nel 2° caso. Per abbracciare i due casi in una sola scrittura quando non occorre tener presenti gli sviluppi effettivi, e nemmeno la diversità di significato della costante γ nelle due formule, scriveremo

$$(10'') \qquad v = \gamma\sqrt{\tau\left(\frac{dx}{dt}\middle|\frac{dx}{dt}\right)},$$

dove è stato introdotto il simbolo τ a rappresentare la differenza dei due casi.

Se m è una costante durante il moto di x che si dirà *massa* del punto x, sarà

$$(11) \qquad T = \tfrac{1}{2} mv^2 = \frac{m\gamma^2}{2} \tau \left(\frac{dx}{dt} \middle| \frac{dx}{dt} \right)$$

ciò che si dirà *energia cinetica*, o *semi-forza viva*, del punto x all'istante t.

4. Se, sotto l'azione della forza xy, il punto x, supposto libero, assume un moto di accelerazione $x \frac{d^2x}{dt^2}$, si riterrà

$$(12) \qquad mx \frac{d^2x}{dt^2} = xy,$$

dalla quale segue essere

$$(13) \qquad m \frac{d^2x}{dt^2} = \lambda x + y,$$

ove λ è una costante che può essere scelta arbitrariamente.

Questa equazione conduce all'altra

$$(14) \qquad m \left(\frac{d^2x}{dt^2} \middle| \frac{dx}{dt} \right) = (y | dx),$$

la quale, per integrazione fornisce il teorema dell'equivalenza fra energia cinetica e lavoro nel moto di un punto.

5. Se il moto di x deve aver luogo con *determinati vincoli*, sotto l'azione della forza xy, al moto *libero* del punto, i vincoli offrono una *reazione*, che può essere rappresentata dal prodotto di x per un punto r, il quale dipende, oltre che dalla qualità dei vincoli, anche dalla posizione di x (vale a dire dalle $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$) ed eventualmente anche da $\frac{dx}{dt}$.

Il moto di x si può, dunque, considerare come il moto che avrebbe x se, essendo libero, fosse sotto l'azione della forza

$$xy + xr = x(y + r),$$

epperò, per la (13)

$$(15) \qquad m \frac{d^2x}{dt^2} = \lambda x + y + r.$$

Tenuto conto della dipendenza di r da x, si può, al posto di $\lambda x + r$ scrivere r, e presentare la (15) nella forma (di *identico contenuto*):

$$(16) \qquad m \frac{d^2x}{dt^2} = y + r.$$

6. Consideriamo ora due sistemi di punti: il sistema X dei punti distinti $x_1, x_2, \ldots, x_p$ ed il sistema y dei punti $y_1, y_2, \ldots, y_p$ univocamente riferiti a quei primi e tali che siano distinti, o (alcuni, o tutti), coincidenti.

Supponiamo X soggetto al sistema delle forze $x_1 y_1 , x_2 y_2 , \dots , x_p y_p$, ed ammettiamo il *principio delle velocità virtuali*, consistente nell'esistenza dell'equazione (δ essendo simbolo di variazione):

$$(17) \qquad (y_1|\delta x_1) + (y_2|\delta x_2) + \cdots + (y_p|\delta y_p) = 0$$

per tutti gli spostamenti $x_1\delta x_1 , x_2\delta x_2 , \dots , x_p\delta x_p$ compatibili con i vincoli del sistema X; sarà questa l'*equazione generale della Statica.*

Ammettiamo poi la estensione al caso nostro del *principio* di d'Alembert relativamente alle forze *perdute*, ed avremo nella

$$(18) \qquad \left(m_1 \frac{d^2x}{dt^2} - y_1\right)\Big|\delta x_1 + \left(m_2 \frac{d^2x}{dt^2} - y_2\right)\Big|\delta x_2 + \cdots + \left(m_p \frac{d^2x}{dt^2} - y_p\right)\Big|\delta x_p = 0$$

l'equazione generale della Dinamica.

È superfluo avvertire che le (17), (18) contengono le ordinarie equazioni generali della Statica e della Dinamica classica.

7. Tenendo conto dei vincoli, dobbiamo ora cercare come si trasformano le (17), (18).

I. Supponiamo che, in primo luogo, i vincoli siano rappresentati da un sistema di μ equazioni, in termini finiti, fra $x_1 , x_2 , \dots , x_p$, e siano queste

$$(19) \qquad f_h(x_{1\nu} , x_{2\nu} , \dots , x_{p\nu} \dots) = 0 \qquad (h = 1 , 2 , \dots , \mu).$$

Indicando con $\mathrm{G}_i f_h$ il *gradiente* della f_h (secondo una definizione data ed uno studio fatto da me in altro lavoro) *rispetto* ad

$$x_i = x_{i_1} e_1 + x_{i_2} e_2 + \cdots + x_{i,n+1} e_{n+1} ,$$

cioè, ponendo

$$(20) \qquad \mathrm{G}_i = \alpha_1^2 \frac{\partial}{\partial x_{i1}} e_1 + \alpha_2^2 \frac{\partial}{\partial x_{i2}} e_2 + \cdots + \alpha_{n+1}^2 \frac{\partial}{\partial x_{i,n+1}} e_{n+1}$$
$$(i = 1 , 2 , \dots , n + 1),$$

ed operando su f_h si ha:

$$\delta f_h = \mathrm{G}_1 f_h|\delta x_1 + \mathrm{G}_2 f_h|\delta x_2 + \cdots + \mathrm{G}_\mu f_h|\delta x_p = 0$$

per $h = 1 , 2 , \dots , \mu$. Moltiplicando ordinatamente queste equazioni per λ_1, $\lambda_2 , \dots , \lambda_\mu$ e sommando con la (17) si avrà, dopo di aver posto

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_\mu f_\mu = f ;$$

$$(21) \qquad (\mathrm{G}_1 f + y_1)|\delta x_1 + (\mathrm{G}_2 f + y_2)|\delta x_2 + \cdots + (\mathrm{G}_p f + y_p)|\delta x_p = 0 .$$

Ora, se determiniamo le $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu$ in guisa che μ delle espressioni moltiplicatrici degli $p(n+1)$ differenziali δx_{ik} $(i = 1, 2, \dots, p\ ;\ k = 1, 2, \dots, n+1)$ si annullino, la (21) diverrà un'equazione soddisfatta da valori arbitrarii dei rimanenti $p(n+1) - \mu$ differenziali; epperò, per quei valori delle $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu$ dovranno essere nulli anche le corrispondenti espressioni moltiplicatrici.

Ciò equivale ad uguagliare a zero tutte le espressioni moltiplicatrici delle δx_{ik}, e poi a determinare le λ col mezzo di μ fra esse. In questa intesa, noi possiamo dunque immaginare scritta *la equazione generale della Statica* in S_n nella maniera seguente:

$$\sum_{r=1}^{r=p} (G_r f + y_r) \,|\, \delta x_r = 0 . \tag{22}$$

Con l'enunciato delle forze perdute *l'equazione generale della Dinamica* si può allora scrivere nella forma

$$\sum_{r=1}^{r=p} \left(m_r \frac{d^2 x_r}{dt^2} - G_r f - y_r \right) \Big| \, \delta x_r = 0 . \tag{23}$$

II. Se, invece delle (19), i vincoli fossero dati dando $x_1, x_2, \dots, x_p$ come funzioni, in termini finiti, di un certo numero s di parametri indipendenti $q_1, q_2, \dots, q_s$; sicchè sia, ad esempio,

$$x_{ik} = \varphi_{ik}(q_1, q_2, \dots, q_s) \tag{24}$$

$$\text{per } i = 1, 2, \dots, p \quad \text{e} \quad k = 1, 2, \dots, n+1 :$$

introducendo allora un altro parametro q_{s+1}, che si dirà parametro di omogeneità con lo scrivere $q_i : q_{s+1}$ al posto di q_i $(i = 1, 2, \dots, s)$ e che si farà poi eguale ad 1, vi saranno da distinguere tre casi, secondochè $s \gtreqless n$.

Nel terzo caso si *amplierà* l'S_n costruendo un S_s con l'aggregare alle $n+1$ unità $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$ che hanno servito alla costruzione di S_n altre $s - n$ unità $e_{n+2}, e_{n+3}, \dots, e_{s+1}$ indipendenti da quelle prime, indipendenti fra loro ed a moduli normali $\alpha_{n+2}, \alpha_{n+3}, \dots, \alpha_{s+1}$; negli altri due casi, si indicherà con S_s lo spazio *contenuto* in S_n, o *combaciante* con S_n, individuato dalle $s+1$ unità $e_1, e_2, \dots, e_{s+1}$.

Ciò fatto, si consideri, in S_s, il punto

$$q = q_1 e_1 + q_2 e_2 + \cdots + q_{s+1} e_{s+1} ; \tag{25}$$

per ogni punto generico x del sistema X, si avrà

$$\delta x_r = \delta \varphi_{r1} \cdot e_1 + \delta \varphi_{r2} \cdot e_2 + \cdots + \delta \varphi_{r,n+1} \cdot e_{n+1} ,$$

da cui

$$(26)\qquad \sum_{r=1}^{r=p}(y_r|\delta x_r)=\sum_{r=1}^{r=p}\left(\frac{y_{r1}}{\alpha_1^2}\delta\varphi_{r1}+\frac{y_{r2}}{\alpha_2^2}\delta\varphi_{r2}+\cdots+\frac{y_{r,n+1}}{\alpha_{n+1}^2}\delta\varphi_{r,n+1}\right).$$

Ora, è $\delta\varphi_{ri}=\mathrm{G}_q\varphi_{ri}|\delta q$, ove G_q è il simbolo di *gradiente* rispetto a q, cioè l'operatore

$$\mathrm{G}_q=\alpha_1^2\frac{\partial}{\partial q_1}e_1+\alpha_2^2\frac{\partial}{\partial q_2}e_2+\cdots+\alpha_{s+1}^2\frac{\partial}{\partial q_{s+1}}e_{s+1};$$

dunque sarà, ritenendo le y come costanti rispetto a G_q, anche quando dipendano dalle q, e ponendo

$$(27)\qquad \frac{1}{\alpha_1^2}\sum_{r=1}^{r=p}y_{r1}\varphi_{r1}+\frac{1}{\alpha_2^2}\sum_{r=1}^{r=p}y_{r2}\varphi_{r2}+\cdots+\frac{1}{\alpha_{n+1}^2}\sum_{r=1}^{r=p}y_{r,n+1}\varphi_{r,n+1}=\mathrm{Q}:$$

$$(28)\qquad \sum_{r=1}^{r=p}(y_r|\delta x_r)=(\mathrm{G}_q\mathrm{Q}|\delta q).$$

Tenendo conto della (28), scriviamo ora la (18) nella forma

$$(29)\qquad (\mathrm{G}_q\mathrm{Q}|\delta q)=\sum_{r=1}^{r=p}m_r\left(\frac{d^2x_r}{dt^2}\middle|\delta x_r\right),$$

e denotiamo con

$$(30)\qquad \mathrm{T}=\frac{\gamma^2}{2}\sum_{r=1}^{r=p}m_r\tau\left(\frac{dx_r}{dt}\middle|\frac{dx_r}{dt}\right)$$

l'*energia cinetica* del sistema X all'epoca t (le $q_1, q_2, \ldots, q_{s+1}$ sono funzioni del tempo); avremo:

$$(31)\quad (\mathrm{G}_q\mathrm{T}|\delta q)=\delta\mathrm{T}=\gamma^2\sum_{r=1}^{r=p}m_r\tau\left(\frac{dx_r}{dt}\middle|\delta\frac{dx_r}{dt}\right)=\gamma^2\sum_{r=1}^{r=p}m_r\tau\left(\frac{dx_r}{dt}\middle|\frac{d}{dt}\delta x_r\right).$$

Sommando, membro a membro, questa equazione con la (29), moltiplicata per $\gamma^2\tau$, avremo ancora

$$\mathrm{G}_q(\gamma^2\tau\mathrm{Q}+\mathrm{T})|\delta q=\gamma^2\sum_{r=1}^{r=p}m_r\tau\left[\left(\frac{d^2x_r}{dt^2}\middle|\delta x_r\right)+\left(\frac{dx_r}{dt}\middle|\frac{d}{dt}\delta x_r\right)\right],$$

ovvero:

$$(32)\qquad \mathrm{G}_q(\gamma^2\tau\mathrm{Q}+\mathrm{T})|\delta q=\gamma^2\frac{d}{dt}\sum_{r=1}^{r=p}m_r\tau\left(\frac{dx_r}{dt}|\delta x_r\right).$$

Introduciamo il punto

$$q'=\frac{dq}{dt}=q_1'e_1+q_2'e_2+\cdots+q_{s+1}'e_{s+1};\quad\left(q_h'=\frac{dq_h}{dt},\ h=1,2,\ldots s+1\right)$$

si avrà:

$$\frac{dx_r}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n+1} (\mathbf{G}_q \varphi_{ri} | q') \, e_i \dots , \tag{33}$$

$$\delta x_r = \sum_{i=1}^{i=n+1} (\mathbf{G}_q \varphi_{ri} | \delta q) \, e_i \dots , \tag{34}$$

e da queste segue

$$\left(\frac{dx_r}{dt} \, \delta x_r \right) = \sum_{i=1}^{i=n+1} \frac{1}{\alpha_i^2} (\mathbf{G}_q \varphi_{ri} \, q') (\mathbf{G}_q \varphi_{ri} | \delta q) ,$$

ovvero:

$$\left(\frac{dx_r}{dt} \, \delta x_r \right) \quad \left[(\mathbf{G}_q \varphi_{r1} \, q') \frac{\mathbf{G}_q \varphi_{r1}}{\alpha_1^2} + \dots + (\mathbf{G}_q \varphi_{r,n+1} \, q') \frac{\mathbf{G}_q \varphi_{r,n+1}}{\alpha_{n+1}^2} \right] \delta q . \tag{35}$$

Dal confronto con la (32) viene

$$\mathbf{G}_q (\gamma^2 \mathbf{r} \mathbf{Q} + \mathbf{T}) | \delta q =$$

$$= \gamma^2 \frac{d}{dt} \Sigma m_r \mathbf{r} \left[(\mathbf{G}_q \varphi_{r1} | q') \frac{\mathbf{G}_q \varphi_{r1}}{\alpha_1^2} + \dots + (\mathbf{G}_q \varphi_{r,n+1} | q') \frac{\mathbf{G}_q \varphi_{r,n+1}}{\alpha_{n+1}^2} \right] \delta q ;$$

e da questa poichè δq è arbitrario:

$$\mathbf{G}_q (\gamma^2 \mathbf{r} \mathbf{Q} + \mathbf{T}) = \tag{36}$$

$$= \gamma^2 \frac{d}{dt} \Sigma m_r \mathbf{r} \left[(\mathbf{G}_q \varphi_{r1} | q') \frac{\mathbf{G}_q \varphi_{r1}}{\alpha_1^2} + \dots + (\mathbf{G}_q \varphi_{r,n+1} | q') \frac{\mathbf{G}_q \varphi_{r,n+1}}{\alpha_{n+1}^2} \right] .$$

Ora, dalla (30) e dalla (33) caviamo

$$\mathbf{T} = \frac{\gamma^2}{2} \Sigma m_r \mathbf{r} \left[\frac{(\mathbf{G}_q \varphi_{r1} | q')^2}{\alpha_1^2} + \frac{(\mathbf{G}_q \varphi_{r2} | q')^2}{\alpha_2^2} + \dots + \frac{(\mathbf{G}_q \varphi_{r,n+1} \, q')^2}{\alpha_{n+1}^2} \right] \tag{37}$$

e da questa, considerando la T come funzione quadratica delle $q'_1, q'_2, \dots, q'_{s+1}$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial q'_h} \right) = \gamma^2 \Sigma m_r \mathbf{r} \left[\frac{(\mathbf{G}_q \varphi_{r1} | q')}{\alpha_1^2} \mathbf{G}_q \varphi_{r1} + \dots + \frac{(\mathbf{G}_q \varphi_{r,n+1} \, q')}{\alpha_{n+1}^2} \mathbf{G}_q \varphi_{r,n+1} \right] e_h \tag{38}$$

$$(h = 1, 2, \dots, s+1).$$

Ne segue, indicando con $\mathbf{G}_{q'}$ il *gradiente* rispetto al punto q', cioè l'operatore

$$\mathbf{G}_{q'} = \alpha_1^2 \frac{\partial}{\partial q'_1} e_1 + \alpha_2^2 \frac{\partial}{\partial r'_2} e_2 + \dots + \alpha_{s+1}^2 \frac{\partial}{\partial q'_{s+1}} e_{s+1} \tag{39}$$

che si avrà

$$\mathbf{G}_{q'} \mathbf{T} = \gamma^2 \sum_{r=1}^{r=p} m_r \tau \left[(\mathbf{G}_q \varphi_{r1} | q') \frac{\mathbf{G}_q \varphi_{r1}}{\alpha_1^2} + \dots + (\mathbf{G}_q \varphi_{r,n+1} | q') \frac{\mathbf{G}_q \varphi_{r,n+1}}{\alpha_{n+1}^2} \right] , \tag{40}$$

ed allora la (41) diventa

$$(41) \qquad G_q(\gamma^2\tau Q + T) = \frac{d}{dt} G_{q'} T,$$

e questa *è l'equazione generale della Dinamica del sistema* X nelle condizioni supposte. Quanto all'*equazione generale della Statica* nelle medesime condizioni, dalla (28) si deduce che essa si presenta nella forma

$$(42) \qquad (G_q Q | \delta q) = 0,$$

e, per essere δq arbitrario, si riduce alla seguente

$$(43) \qquad G_q Q = 0.$$

La (41) si scinde nelle seguenti $s+1$:

$$(44) \qquad \gamma^2\tau \left(\frac{\partial Q}{\partial q_h}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_h} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_h'}\right) \qquad h = 1, 2, \ldots, s+1,$$

dove le parentesi per le $\left(\frac{\partial Q}{\partial q_h}\right)$ e le $\left(\frac{\partial T}{\partial q_h'}\right)$ stanno ad indicare che le derivate vanno prese solo in quanto le $q_1, q_2, \ldots, q_{s+1}$ entrano nelle φ_{ri} (vedi form. 27) e le $q_1', q_2', \ldots, q_{s+1}'$ esplicitamente nella T.

Le (44) convengono ad ogni spazio nel quale una determinazione metrica conferisca al quadrato dell'elemento lineare la forma

$$ds^2 = \gamma^2\tau(dx|dx) = \gamma^2\tau \sum_{i=1}^{i=n+1} \frac{dx_i^2}{\alpha_i^2},$$

ove γ, τ, α_i $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ hanno il significato dato innanzi; e sia

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_{n+1} e_{n+1}.$$

Matematica. — *Sulla teoria delle equazioni integrali generalizzate.* Nota dell'ing. Giovanni Giorgi, presentata dal Corrisp. G. Lauricella.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Astrofisica. — *Variazioni nello spettro della Nova (18. 1912) Geminorum 2.* Nota di V. Fontana, presentata dal Socio A. Riccò.

Fisica. — *Bussola azimutale ad onde hertziane.* Nota dell'ing. A. Tosi, presentata dal Socio Millosevich.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sul peso molecolare del selenio in soluzione* (1). Nota di F. Olivari, presentata dal Socio G. Ciamician.

1. Le determinazioni crioscopiche contenute nella presente Nota sono la continuazione delle ricerche da me istituite sul peso molecolare del selenio in soluzione allo scopo di illustrare il comportamento che questo metalloide presenta nell'iodio fuso. Gli abbassamenti del punto di congelamento forniti dal selenio in soluzione nell'iodio corrispondono infatti, come ho ripetutamente dimostrato (2), ad una grandezza molecolare prossima ad Se_2 la quale se concorda con quella ricavata dalla densità di vapore a varie temperature (3), è però assai diversa dai valori Se_8 e Se_{10} a cui conducono le depressioni crioscopiche misurate da Beckmann nel fosforo (4) e nello ioduro di metilene (5).

Le ragioni di questo diverso contegno osmotico del selenio sono da ricercarsi o nella possibilità che allo stato di soluzione anche gli elementi poliatomici subiscano una dissociazione molecolare dovuta alla speciale azione del mezzo, alla diluizione e alla temperatura, come Timofejeff (6) e Popoff (7) avrebbero osservato per le molecole ottoatomiche dello zolfo nelle soluzioni diluite di benzolo e dimetilanilina, o nella possibilità che nel campo del fuso e quindi nelle condizioni sperimentali stesse in cui si compie la de-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Univ. di Parma, diretto dal prof. G. Plancher.

(2) Rend. Acc. Lincei, vol. XVII, 2° sem., pag. 389 (1908) e vol. XVIII, 2° sem., pag. 264 (1909).

(3) Biltz. Z. f. physik. Chem. *19*, pag. 385 (1896); Szarvasy. Ber. *30*, pag. 1244 (1897).

(4) Z. f. physik. Chem. *22*, pag. 614 (1897).

(5) Z. f. physik. Chem. *42*, pag. 853 (1903).

(6) C. C. 1903, II, pag. 1266.

(7) C. C. 1903, II, pag. 1265.

terminazione del peso molecolare, si formino composti fra il metalloide e l'iodio (p. es. $Se_2 I_2$).

Contro quest'ultima ipotesi stanno in parte le esperienze di Pellini e Pedrina [1] sull'equilibrio di solubilità relativo al sistema binario Se-I in seguito alle quali deve escludersi la formazione, per fusione reciproca dei componenti, di ioduri di selenio esistibili come fasi solide. Nemmeno i saggi colorimetrici di Beckmann [2] che si riferiscono già a condizioni sperimentali diverse, provano l'esistenza di combinazioni fra selenio e iodio come ho avuto occasione di far subito rilevare in una precedente Nota [3].

Per portare un ulteriore contributo alla conoscenza dello stato molecolare del selenio in soluzione, sin dal mio primo lavoro sullo stesso argomento ho manifestato il proposito di estendere le misure osmotiche ad altri solventi. A tal fine ho recentemente sperimentato col metodo crioscopico le soluzioni del selenio in cloruro mercurico fuso [4] riconoscendo che in questo mezzo la complessità del selenio va continuamente diminuendo col crescere della diluizione come se la molecola poliatomica subisse una graduale dissociazione.

Ora mi è sembrato non privo di interesse proseguire le ricerche crioscopiche in un solvente analogo: il bromuro mercurico, già studiato da Beckmann e più tardi da Guinchant per la determinazione dei pesi molecolari di molti sali.

2. Per escludere la formazione di composti nel sistema binario $Hg Br_2$-Se ho intrapreso, come già per il sistema analogo $Hg Cl_2$-Se, due serie di ricerche preliminari e cioè lo studio dell'equilibrio di solubilità fra i componenti e l'esame chimico quantitativo delle fasi solide ottenute per congelamento; ricordando peraltro che tali ricerche sono probative solo per quanto riguarda l'esistenza dei composti (di addizione o di sostituzione) capaci di cristallizzare dalle miscele fuse.

Il diagramma della fig. 1 e i dati riportati nella tabella I riassumono i fenomeni completi di equilibrio termico relativi ai miscugli di bromuro mercurico e selenio.

(1) Rend. Acc. Lincei, XVII, pag. 78 (1908).
(2) Z. f. anorg. Chem. *63*, pag. 63 (1909).
(3) Rend. Acc. Lincei, XVIII, 2° sem., pag. 264 (1909).
(4) Rend. Acc. Lincei, XVIII, 2° sem., pag. 94 (1909).

Tabella I.

Sistema $HgBr_2$-Se.

Se % di miscela	T_1	T_2 1° punto d'arresto	θ_2 durata d'arresto in minuti	T_3 2° punto d'arresto	θ_3 durata d'arresto in minuti
0	236°	—	—	—	—
2.9	233	—	—	—	—
7.3	230.5	227.4	14	210-211	5
10.0	229.8	227.4	22	210-211	8
14.4	227.9	227.4	38	210-211	10
22.0	—	227.4	30	210-211	14
28.2	—	227.4	27	210-211	18
35.0	—	227.4	20	210-211	21
44.5	—	227.4	8	210-211	30
55.0	227.2	—	—	210-211	48
61.0	226.5	—	—	210-211	52
68.0	224.4	—	—	210-211	63
74.0	222.2	—	—	210-211	80
78.0	?	—	—	210-211	90
86.0	?	—	—	210-211	89
92.0	?	—	—	210-211	80
96.0	?	—	—	210-211	54
100	217°	—	—	—	—

Da essi risulta subito: 1°) la inesistenza di composti di addizione cristallizzabili; 2°) la comparsa di una lacuna di solubilità allo stato liquido fra i componenti nell'intervallo di concentrazione del 16-53 % in peso di selenio. Debbo osservare che le temperature e le durate di arresto sulla orizzontale eutectica a 210-211° non poterono essere determinate che per fusione stante gli enormi e inevitabili sopraraffreddamenti a cui va soggetto il selenio; per la stessa ragione e per la grande viscosità delle miscele di cui è nota l'influenza perturbatrice sulle cristallizzazioni e sul regolare flusso termico, le temperature di congelamento T_1 fra 75 e 100 % di selenio risultarono troppo indecise e sconcordanti per meritare fiducia. Per ciò, fissata approssimativamente la posizione del punto crioidratico (a circa 81 %) per mezzo del massimo di durata eutectica, il presumibile complemento della curva (del resto senza importanza per le conclusioni che ci interessano) venne punteggiato. Non fu determinata la curva critica p. q.

Ad eguale risultato negativo quanto alla formazione di composti (anche di sostituzione) si perviene esaminando in quale stato è contenuto il selenio nella massa congelata, perchè basta la semplice lisciviazione con acqua per

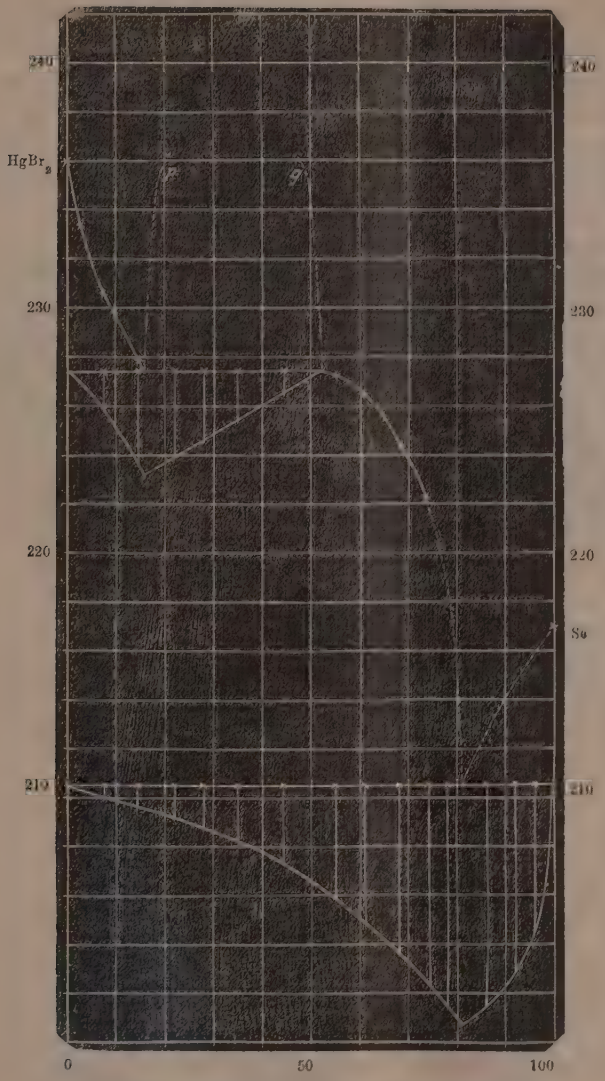


Fig. 1.

separare quantitativamente tutto il metalloide allo stato libero; ecco alcune misure eseguite su miscugli di varia concentrazione:

Miscela		conc. %	Se trovato	diff.
$HgBr_2$	Se			
gr. 50	gr. 0,3793	0,7586	0,3796	+ 0,0003
» 50	» 0,4528	0,9056	0,4520	— 0,0008

3. L'abbassamento molecolare medio relativo al bromuro mercurico determinato da Beckmann (1) con antrachinone e fenantrenchinone fra le conc. 0,2-0,9 % raggiunge il notevole valore di K = 367. Secondo le esperienze calorimetriche di Guinchand (2) la costante calcolata colla formola di van t' Hoff sarebbe invece K = 403, valore a cui Guinchaut perviene anche con misure crioscopiche adoperando la dibromonaftalina (K = 407) ed estrapolando i risultati per una diluizione infinita. In vista di questa divergenza ho creduto necessario di verificare l'abbassamento molecolare del solvente, curando l'esattezza sperimentale in ogni particolare.

Purificato il bromuro mercurico per sublimazione (PF = 238°), ho scelto quali sostanze normali l'antrachinone, il fenantrenchinone e lo zolfo. Per evitare l'errore dovuto alla lieve sublimabilità del solvente ho eseguito poche misure in serie partendo da una forte quantità iniziale di $HgBr_2$ (60-100 gr.); inoltre ho riconosciuto necessario mantenere i termometri per molto tempo, prima di usarli, alla temperatura di esperienza per rendere trascurabili gli spostamenti dello zero.

Ecco il risultato delle determinazioni eseguite con un apparecchio Beckmann a bagno di paraffina.

Tabella II.

conc. %	Δ	K
Antrachinone $C_{14}H_8O_2 = 208$		
0,1892	0,37	407
0.4328	0,84	399
0.6579	1,26	388.9
Fenantrenchinone $C_{14}H_8O_2 = 208$		
0,1490	0,29	404.8
0,4133	0,79	397.5
0,6980	1,31	390.3
0.2166	0.42	403.5
0,4917	0.93	393.4
0,5975	1,13	393.4
0,9730	1,75	374.1

(1) Z. an. chem. *55*, pag. 175 (1907).
(2) C. r. d. l'Acad. des sciences, *149*, pp. 478-81.

	Solfo $S_8 = 256$	
0,2078	0,33	406.5
0,5304	0,82	395.8
0,4140	0,64	397
0,8096	1,26	389

L'abbassamento molecolare a grande diluizione (in media 405) concorda in modo soddisfacente col valore 403 calcolato da Guinchant. Col crescere della concentrazione si nota peraltro una spiccata diminuzione della costante crioscopica dovuta verosimilmente alla forte densità del bromuro mercurico fuso in modo analogo a quanto venne già osservato per l'ioduro di metilene (1) e per l'iodio (2). E però non è esatto fare la media dei valori ottenuti in un intervallo esteso di concentrazione, ma deve assumersi come costante di abbassamento quella relativa alle soluzioni diluitissime come vuole la teoria di van t' Hoff. Nè parimenti sarebbe esatto l'affermare i fenomeni di polimerizzazione dal comportamento crioscopico a concentrazioni crescenti senza confrontare l'andamento dei pesi molecolari della sostanza da studiarsi con quello di altre sostanze normali esse pure sperimentate a concentrazione crescente.

Per queste ragioni nelle misure che seguono sul peso molecolare del selenio (Tab. III) si tenne come costante crioscopica il valore 405 e si eseguirono parallelamente alcune determinazioni con lo zolfo per avere una misura dell'anomalia crioscopica dovuta alla forte densità del solvente.

Tabella III.

conc. %	Δ	PM
	Selenio $Se_8 = 633,6$	
0,1254	0,175	290.2
0,2148	0,275	316.3
0,0986	0,14	285.3
0,1452	0,195	301.6
0 2870	0,34	341.9
0,6413	0,64	405.8
1,249	1,13	447.7
2,002	1,69	479.8
3,043	2,41	511.4
4,484	3,31	548.7
5,630	3,96	575.8
7,870	4,98	640.0

(1) Garelli e Bassani, Gazz. chim. ital., 1901, I, pag. 407.

(2) Olivari, Rend. Acc. Lincei, vol. XVIII, 2° sem., pag. 384 (1909) e vol. XIX, 1° sem., pag. 488 (1910).

Solfo $S_8 = 256$

0.8096	1.26	260.2
1.344	2,01	270.8
1.859	2,71	277.8
2.670	3.69	293
3.978	4,93	326.8

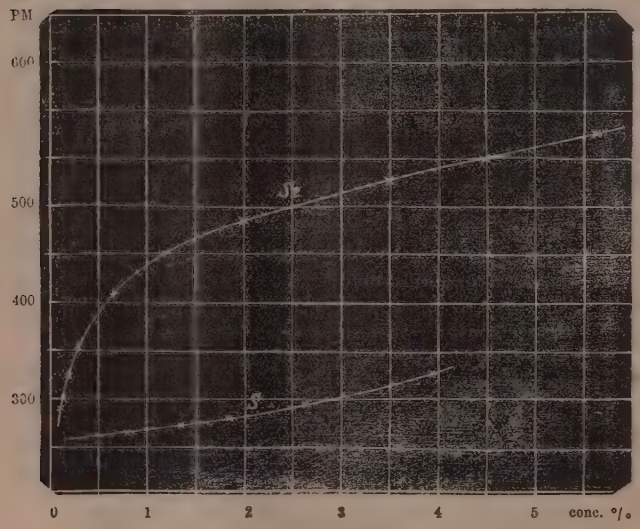


Fig. 2.

4. L'ispezione dei risultati qui riferiti e rappresentati graficamente nella fig. 2 dimostra che alle forti diluizioni raggiunte la complessità apparente del selenio è di un ordine di grandezza compreso fra $Se_3 = 237.6$ e $Se_4 = 316.8$ e ch'essa subisce un rapido e progressivo aumento colla concentrazione. Nell'intervallo 0,1-2 % tale aumento è di gran lunga superiore a quello che potrebbe imputarsi all'elevata densità del solvente, come emerge in modo chiaro dalle esperienze comparative collo zolfo. Per concentrazioni superiori al 2 % l'anomalia crioscopica dovuta alla densità del $Hg\,Br_2$ si fa invece sempre più sensibile rendendo dubbio il significato dei corrispondenti valori del peso molecolare.

Precisato così il comportamento crioscopico del selenio è giunto il momento di trarre le possibili indicazioni sullo stato del metalloide in soluzione nel $Hg\,Br_2$ fuso.

Le ricerche esposte al § 2 concordano nel dimostrare che la massa congelata ($Hg\,Br_2 + Se$) non contiene in quantità percettibile alcun prodotto

di reazione chimica fra il selenio ed il solvente; ma a priori ciò non è ancora sufficiente per la retta interpretazione dei risultati crioscopici, potendo composti fra i due componenti, esistere solo nella fase liquida e decomporsi per congelamento. Occorrerebbe quindi ricercare queste eventuati combinazioni del selenio nel fuso.

Ora una reazione reversibile nel fuso fra Se e $HgBr_2$ può immaginarsi rappresentata da una di queste equazioni:

$$2\,Se_x + x\,HgBr_2 \rightleftarrows x\,HgSe + x\,Se_2Br_2$$
$$2\,Se_x + 2x\,HgBr_2 \rightleftarrows x\,HgBr_2 + x\,Se_2Br_2$$

in cui Se_x è la molecola del selenio di complessità incognita presente nel fuso.

Tali equilibrii non sembrano però probabili; essi darebbero luogo al protobromuro di selenio (Se_2Br_2) liquido poco stabile che distilla a 225° con parziale decomposizione, mentre le soluzioni di selenio nel sale mercurico fuso non sviluppano prodotti volatili nemmeno se riscaldate a 260°, all'infuori di una lieve quantità di solvente sublimato (1). Per contro, fondendo una miscela di $HgBr_2$ e Se_2Br_2 si osservano nettamente i vapori rosso-bruni e la condensazione di protobromuro (e di altri prodotti) nelle parti fredde dell'apparecchio.

Per tutte le esposte presunzioni dovrebbe dunque concludersi che lo stato del selenio nel bromuro mercurico fuso è caratterizzato da una progressiva dissociazione delle molecole complesse (Se_8?) per diluizione piuttosto che all'esistenza di reazioni chimiche tra i componenti, in modo analogo a quanto venne osservato nel cloruro mercurico.

Ci preme di far rilevare come questa conclusione abbia lo stesso significato e la stessa attendibilità di tutte le altre conclusioni che affermano la dissociazione molecolare dei corpi in soluzione; ricordiamo a questo proposito il contegno osmotico delle sostanze organiche ossidrilate in varî mezzi anomalizzanti e a forte diluizione, interpretato come una depolimerizzazione fisica del soluto comparabile a quella che si verifica spesso allo stato di gas e a pressione ridotta. Chi ritiene invece che ogni dissociazione molecolare in una fase liquida debba essere provocata da una addizione del solvente al soluto (Abegg, Walden), potrà nel nostro caso rappresentare il fenomeno con una equazione del tipo:

$$Se_x + y\,HgBr_2 \rightleftarrows [Se]_x \cdot [HgBr_2]_y$$

(1) Uguale assenza di prodotti volatili venne rilevata per le soluzioni di Se in $HgCl_2$ (PF = 287°.5) nelle quali il metalloide presenta lo stesso comportamento crioscopico. Ora è da notarsi che il cloruro di selenio Se_2Cl_2 comincerebbe a distillare a 100-130° decomponendosi parzialmente (Ramsay).

in cui $x < 8$. Data l'inapplicabilità o la insufficienza dei metodi proposti per l'indagine dei sistemi omogenei, non ci è lecito di affermare nè di escludere una simile « solvatazione ».

Giunto al termine di questo lavoro mi sia permesso di porgere al prof. Plancher i miei vivi ringraziamenti per la cortese ospitalità concessami nell'Istituto da lui diretto.

Chimica. — *I solfoantimoniti ramosi.* Nota di N. Parravano e P. de Cesaris, presentata dal Socio E. Paternò.

Chimica. — *Azione dell'acido solforico sopra l'acenaftene.* Nota di E. Olivieri-Mandalà, presentata dal Socio E. Paternò.

Chimica-fisica. — *Ricerche sui seleniti asimmetrici. Sui prodotti di addizione della piperidina cogli acidi selenioso e solforoso.* Nota II. di L. Marino e A. Toninelli, presentata dal Socio R. Nasini.

Biologia. — *Alcune osservazioni morfologiche e biologiche intorno alla Forda formicaria Heyden.* Nota di Dina Lombardi, presentata dal Socio Grassi.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

Oddone E. *Sui periodi sferoidali proprî di una sfera terrestre rigida per elasticità o rigida per mutua gravitazione. Con applicazioni al ricavo dell'accelerazione di gravità alla superficie terrestre ed alle costanti elastiche di rigidità dei principali pianeti del sistema solare.* Presentata dal Socio Millosevich.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Blaserna dà il triste annuncio della morte del Socio straniero prof. Edoardo Strasburger, mancato ai vivi il 19 maggio 1912; apparteneva il defunto all'Accademia, per la Botanica, sino dal 7 novembre 1893.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Righi fa omaggio del volume: *Onoranze a Giovanni Capellini nel 50° anniversario del suo insegnamento nella Università di Bologna*, a nome del Comitato ordinatore del Comitato stesso di cui egli ebbe la Presidenza.

Il Socio Foà presenta il volume dei lavori pubblicati dall'Istituto di Anatomia patologica di Torino negli anni 1909-1911. Il volume contiene 16 Memorie corredate di molte tavole, e riguardanti diversi argomenti di Anatomia patologica e di Patologia sperimentale.

E. M.